Zur

# Theorie der Wendepuncte, besonders der Curven vierter Ordnung.

INAUGURAL-DISSERTATION

WELCHE

ZUR ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE

AN DER

FRIEDRICH-WILHELMS UNIVERSITÄT ZU BERLIN

MIT ZUSTIMMUNG

DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

am 26. Juli 1875

NEBST DEN ANGEHÄNGTEN THESEN

ÖFFENTLICH VERTHEIDIGEN WIRD

der Verfasser

**Justus Grassmann**

aus Stettin.

**OPPONENTEN:**

Caspary, Dd. phil.
Meissner, Cand. math.
Knappe, Cand. med.

BERLIN

Buchdruckerei von Gustav Lange (Paul Lange).

Friedrichstr. 103.

Seinen

# lieben Eltern

der dankbare

Verfasser.

# Einleitung.

Die vorliegende Arbeit verdankt ihre Entstehung einer Aufforderung meines Vaters, des Professors Grassmann zu Stettin, zu untersuchen, ob der für Curven dritter Ordnung gültige Satz, dass auf der Verbindungslinie zweier Wendepunkte stets ein dritter liege, nicht einer Erweiterung auf Curven vierter und höherer Ordnung fähig sei.

Eine Ausdehnung des genannten Satzes auf Curven höherer Ordnung, für Wendepunkte in gerader Linie gültig, umfasst nur specielle Curvenarten. So ergiebt sich für Curven vierter Ordnung der Satz, dass, sobald drei ihrer Wendepuncte in gerader Linie liegen, auf dieser stets noch ein vierter Wendepunkt sich befindet. Dass aber drei Wendepuncte in gerader Linie liegen, ist nur für solche Curven vierter Ordnung gültig, für welche eine bestimmte Invariante verschwindet.

Ich unternahm daher den Versuch, den von meinem Vater vermutheten Satz zu beweisen, dass ein durch fünf Wendepuncte einer Curve vierter Ordnung gelegter Kegelschnitt die Curve noch in drei weiteren Wendepuncten schnitte. Es gelang mir denselben einestheils mit Hülfe der Sätze über die Schnittpuncte von Curven, wie sie von Jacobi, Plücker und Cayley aufgestellt sind, anderntheils vermöge des sogenannten Carnot'schen Theorems über die Schnittpuncte eines Polygons mit einer Curve zu beweisen.

Jedem durch acht Wendepunkte gehenden Kegelschnitt (K) zeigt sich dabei ein anderer ($K_1$) zugeordnet, der durch die ferneren Schnittpuncte der Wendetangenten mit der Curve vierter Ordnung hindurchgeht. Dabei ist der Curve vierter Ordnung ($C_4$) selbst, in Bezug auf jede solche zwei Kegelschnitte, eine andere Curve von derselben Ordnung ($C'_4$) zugeordnet, welche die acht Wendetangenten ($t_1, t_2, \ldots t_8$) von $C_4$ gleichfalls zu Wendetangenten hat; die zugehörigen acht Wendepuncte von $C'_4$ liegen auf K, während die ferneren Schnittpuncte dieser Curve mit den Wendetangenten auf $K_1$ liegen.

Hieraus folgt dann die wichtige analytische Darstellung der Curven vierter Ordnung,

$$C_4 . C_4' \equiv t_1 . t_2 \ldots . t_8 + \lambda K^3 . K_1$$

welche der bekannten Darstellung der Curven dritter Ordnung in der Form

$$C_3 \equiv t_1 . t_2 . t_3 + \lambda P^3$$

vollkommen analog ist, und zu ähnlichen Sätzen wie die letztere Veranlassung giebt.

Ferner ergiebt sich, wie bei den Curven dritter Ordnung, ein System von zwölf geraden Linien durch die neun Wendepuncte, hier ein solches von 759 Kegelschnitten durch die 24 Wendepuncte, das in ähnlicher Weise wie das erstere angeordnet ist: Existiren dort vier Tripel von geraden Linien, deren jedes alle neun Wendepuncte enthält, so giebt es hier 3795 Tripel von Kegelschnitten, die jedes durch alle 24 Wendepuncte hindurch gehen: ein Umstand übrigens, der zeigt, dass eine analytische Behandlung des Wendepunctproblems in der Weise wie bei den Curven dritter Ordnung hier nicht möglich ist.

Endlich folgt aus dem Wendepunctsatze unmittelbar auch der Satz von der Realität von höchstens acht Wendepuncten. —

Ich beginne nun im folgenden, nach einer kurzen Darstellung der oben erwähnten Hülfssätze über die Schnittpuncte von Curven, mit dem Beweise der soeben angeführten und einiger mit ihnen in enger Verbindung stehender Sätze, wende mich dann zu den dualistisch entsprechenden Sätzen über Curven vierter Classe und schliesse die Theorie der Curven vierter Ordnung mit der Betrachtung einiger Specialitäten und dem Beispiel der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpuncten, die eine vollständige analytische Entwickelung der Kegelschnitte K und $K_1$, und der zugeordneten Curve $C'_4$ gestatten.

Am Schlusse endlich meiner Arbeit werde ich den allgemeinen Satz beweisen, dass, wenn man durch $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ Wendepuncte einer Curve $n^{ter}$ Ordnung eine Curve $n-2^{ter}$ Ordnung legt, diese auch durch weitere $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Wendepuncte der Curve $n^{ter}$ Ordnung hindurchgeht. Auch hier werden zugeordnete Curven in ähnlicher Weise wie bei den Curven vierter Ordnung auftreten, die indess wegen ihres hohen Grades weniger Interesse in Anspruch nehmen. —

Ich bemerke noch, dass ich mich in Terminologie und Bezeichnung fast durchweg an diejenige der Fiedler'schen Bearbeitung des Salmon-schen Werkes über analytische Geometrie angeschlossen habe. —

---

## § 1.

## Ueber die Schnittpunctsysteme von Curven.[1]

Die Zahl der zur Bestimmung einer Curve $n^{ter}$ Ordnung nothwendigen Punkte ist gleich $\frac{n(n+3)}{2}$. Denn diese liefern durch Substitution ihrer Coordinaten in die allgemeine Curvengleichung $\frac{n(n+3)}{2}$ Bedingungsgleichungen für die $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Coefficienten derselben, so dass diese im Allgemeinen bis auf einen Proportionalitätsfactor eindeutig bestimmt werden.

Doch können die $\frac{n(n+3)}{2}$ Puncte solche besonderen Lagen haben, dass dies nicht mehr der Fall ist; wie unmittelbar daraus klar ist, dass sich zwei Curven $n^{ter}$ Ordnung in $n^2$ Puncten schneiden, also (wenn $n>2$) sich durch beliebige $\frac{n(n+3)}{2}$ von diesen Puncten mindestens zwei und, wie sich sogleich zeigen wird, unendlich viele Curven $n^{ter}$ Ordnung legen lassen. In der That, sind $U=0$ und $V=0$ die Gleichungen zweier Curven $n^{ter}$ Ordnung, (die jede auch in Curven niederer Ordnung zerfallen, aber nicht eine gemeinschaftliche Theilcurve enthalten dürfen) und ist $\lambda$ eine beliebige Grösse, so stellt $U+\lambda V=0$ offenbar eine neue Curve $n^{ter}$ Ordnung dar, welche durch die $n^2$ Schnittpuncte der ersteren beiden Curven hindurchgeht. Da nun jedem der unendlich vielen Werthe von $\lambda$ eine bestimmte Curve entspricht, so gilt der Satz:

**I.** «*Durch die $n^2$ Schnittpuncte zweier Curven $n^{ter}$ Ordnung lassen sich unendlich viele Curven derselben Ordnung legen.*»

Durch Wahl eines weiteren beliebigen Punctes ist dann $\lambda$ und damit auch die zugehörige Curve $U+\lambda V$ bestimmt. Da nun eine Curve $n^{ter}$ Ordnung im Allgemeinen durch $\frac{n(n+3)}{2}$ Puncte bestimmt ist, so

[1] Vergl. Salmon, höhere ebene Curven S. 15 u. ff.

werden durch $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ von den genannten $n^2$ Puncten die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Puncte bestimmt sein, d. h.

**II.** «*Alle Curven* $n^{ter}$ *Ordnung, die durch* $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ *feste Puncte gehen, enthalten noch andere* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *feste Puncte.*

Diese $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Puncte dürfen jedoch nicht willkürlich unter den $n^2$ Durchschnittspuncten von U und V ausgewählt werden. Sie müssen eben von der Art sein, dass sich, nach Hinzufügung eines Punctes ausserhalb, durch dieselben eine und nur eine, einfache Curve $n^{ter}$ Ordnung legen lässt.

Es kommt also, um die Anwendbarkeit des Satzes II zu prüfen, wesentlich auf die Untersuchung der Bedingungen an, unter denen $\frac{n(n+3)}{2}$ gegebene Puncte eine einfache Curve $n^{ter}$ Ordnung eindeutig bestimmen.

Es sind nun besonders folgende zwei Fälle, in denen dies nicht stattfindet.

1) Es seien unter den Bestimmungspuncten der Curve $n^{ter}$ Ordnung mehr als $np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$, also etwa $np - \frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1$ auf einer Curve $p^{ter}$ Ordnung gelegen, so kann man, da

$$\frac{n(n+3)}{2} - np + \frac{(p-1)(p-2)}{2} - 1 = \frac{(n-p)(n-p+3)}{2} \text{ ist,}$$

durch die übrigbleibenden Puncte eine Curve $n-p^{ter}$ Ordnung legen, die mit der Curve $p^{ter}$ Ordnung zusammen eine Curve $n^{ter}$ Ordnung bildet. Diese Curve $n^{ter}$ Ordnung ist nun entweder die einzige mögliche durch die gegebenen Puncte, oder es ist noch eine und damit nach Satz I eine unendliche Schaar von Curven $n^{ter}$ Ordnung durch dieselben möglich. Der letztere Fall zeigt, dass von den gegebenen $np - \frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1$ Puncten einer schon durch die übrigen bestimmt sein muss, dass also jede Curve $n^{ter}$ Ordnung, die durch $np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ Puncte der Curve $p^{ter}$ Ordnung hindurchgeht, auch noch durch diesen einen, und wie sich auf dieselbe Weise ergiebt, durch bestimmte $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ Puncte der Curve $p^{ter}$ Ordnung hindurchgeht. D. h. „Sind von den Bestimmungs-

puncten einer Curve $n^{ter}$ Ordnung mehr als $np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ auf einer Curve $p^{ter}$ Ordnung gelegen, so zerfällt die Curve $n^{ter}$ Ordnung entweder in die Curve $p^{ter}$ und eine $n-p^{ter}$ Ordnung, oder sie wird einfach, zweifach, $\varkappa$fach unbestimmt, je nachdem 1, 2 oder $\varkappa$ Puncte mehr als $np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ auf der Curve $p^{ter}$ Ordnung liegen.

2) Es seien unter den gegebenen Puncten mehr als

$$\nu = mp - \frac{(m+p-n-1)(m+p-n-2)}{2}$$

etwa $\nu + 1$ Durchschnittspuncte zweier Curven $m^{ter}$ und $p^{ter}$ Ordnung $C_m$ und $C_p$ gegeben.[2]) Lege ich dann durch $\frac{(n-m)(n-m+3)}{2}$ Puncte von $C_p$ eine Curve $n-m^{ter}$ Ordnung; durch $\frac{(n-p)(n-p+3)}{2}$ Puncte von $C_m$ eine solche $n-p^{ter}$ Ordnung, so habe ich zwei Curven $n^{ter}$ Ordnung

$$C_m \cdot C_{n-m} \text{ und } C_p \cdot C_{n-p}$$

die $mp - \frac{(m+p-n-1)(m+p-n-2)}{2} + \frac{(n-p)(n-p+3)}{2}$

$$+ \frac{(n-m)(n-m+3)}{2} + 1 = \frac{n(n+3)}{2}$$

Puncte gemein haben. Da nun durch diese $\frac{n(n+3)}{2}$ Puncte zwei Curven $n^{ter}$ Ordnung gehen, so gehen auch (nach I) unendlich viele hindurch, und waren daher die obigen Durchschnittspuncte nicht unabhängig von einander in Bezug auf eine Curve $n^{ter}$ Ordnung, sondern einer durch die übrigen $mp - \frac{(m+p-n-1)(m+p-n-2)}{2}$ bestimmt. Durch dasselbe Raisonnement lässt sich zeigen, dass von den $mp$ Durchschnittspuncten zweier Curven $m^{ter}$ und $p^{ter}$ Ordnung $\frac{(m+p-n-1)(m+p-n-2)}{2}$ in Bezug auf eine Curve $n^{ter}$ Ordnung durch die übrigen bestimmt sind.

**II*** Der Satz II ist also nicht anwendbar, wenn von den gegebenen $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Puncten, mehr als $n \cdot p - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ auf einer Curve $p^{ter}$ Ordnung liegen, oder wenn von ihnen mehr als $mp - \frac{(m+p-n-1)(m+p-n-2)}{2}$ Puncte Schnittpuncte zweier Curven $m^{ter}$ und $p^{ter}$ Ordnung sind. ($m < n$, $p < n$).

---

2) wo natürlich $m < n$, $p < n$ ist.

So dürfen z. B. von den 26 Puncten, welche ein Büschel von Curven sechster Ordnung bestimmen, nicht 20 Puncte Durchschnittspuncte einer Curve $4^{ter}$ und einer $5^{ter}$ Ordnung sein. Alle durch diese 20 Puncte gehenden eigentlichen Curven $6^{ter}$ Ordnung bedürfen zu ihrer Bestimmung noch acht weiterer Puncte; auf sie ist also der Satz II nicht anwendbar.

Uebrigens können, wie schon bemerkt, die beiden Curven $n^{ter}$ Ordnung (U und V) eigentliche oder zerfallende Curven sein. — Geht also, wie es bei den später folgenden Anwendungen meist der Fall sein wird, durch $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ von den Durchschnittspuncten beider, eine dritte zerfallende Curve $n^{ter}$ Ordnung (W) hindurch, so liegen auf dieser auch die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Schnittpuncte von U und V, sobald sich durch die genannten Puncte eine einfache, durch Festsetzung eines ferneren, von ihnen unabhängigen Punctes vollständig bestimmte Curve $n^{ter}$ Ordnung legen lässt. — Dies erfordert 1) dass keine zwei der Systeme U, V, W eine gemeinschaftliche Theilcurve enthalten; oder dass jede Theilcurve $m^{ter}$ Ordnung so gelegt ist, dass von ihren Bestimmungspuncten höchstens $mp - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ willkürlich auf einer Curve $p^{ter}$ Ordnung liegen ($p<m$), und 2) dass die $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Puncte den obigen zwei Bedingungen (II*) genügen, d. h., dass vor allem nie mehr als $np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ von diesen Puncten auf einer Curve $p^{ter}$ Ordnung liegen. Diese Bedingung kann man auch so aussprechen, dass von den genannten Puncten auf einer Curve $p^{ter}$ Ordnung höchstens so viel liegen dürfen, dass zur Bestimmung der sie ergänzenden Curve $n-p^{ter}$ Ordnung noch die genügende Zahl von Puncten, $\frac{(n-p)(n-p+3)}{2}$, übrig bleibt.

Der Fall einer gemeinschaftlichen Theilcurve ist natürlich unter Weglassung derselben besonders zu behandeln. —

Aus dem auf Seite 5 bewiesenen ergeben sich direct die folgenden Sätze:

III. «*Alle Curven* $n^{ter}$ *Ordnung, die* $np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ (in Bezug auf eine Curve $n^{ter}$ Ordnung unabhängige) *Puncte mit einer Curve* $p^{ter}$ *Ordnung gemein haben, haben mit derselben weitere* $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ *Puncte gemein. Die übrigen Durchschnittspuncte je zweier dieser Curven* $n^{ter}$ *Ordnung liegen auf einer Curve* $n - p^{ter}$ *Ordnung*», und

IV. «*Alle Curven* $n^{ter}$ *Ordnung, welche durch* $mp - \frac{1}{2}(m+p-n-1)(m+p-n-2)$ *Durchschnittspuncte zweier Curven der* $m^{ten}$ *und* $p^{ten}$ *Ordnung* ($m < n$, $p < n$) *hindurchgehen, enthalten auch die übrigen* $\frac{1}{2}(m+p-n-1)(m+p-n-2)$ *Durchschnittspuncte beider Curven. Die ferneren* $m(n-p)$ *Schnittpuncte einer jeden dieser Curven* $n^{ter}$ *Ordnung mit der Curve* $m^{ter}$ *Ordnung, liegen auf einer Curve* $n - p^{ter}$ *Ordnung, ihre ferneren* $p(n-m)$ *Schnittpuncte mit der Curve* $p^{ter}$ *Ordnung auf einer Curve* $n - m^{ter}$ *Ordnung.*»

Alle diese Sätze über Schnittpuncte von Curven verlangen eine kleine Modification, wenn einer der gegebenen Puncte Doppel- oder Rückkehrpunct für eine der Curven $n^{ter}$ Ordnung ist. Ein solcher Punct zählt dann als Bestimmungsstück einfach, als Schnittpunct doppelt, und wird daher die Zahl der durch die übrigen bestimmten Schnittpuncte durch jeden Doppel- oder Rückkehrpunct um eine Einheit vermindert. Zugleich findet in einem solchen Puncte eine Berührung aller übrigen Curven des betreffenden Curvenbüschels statt.

Anm.: Die Sätze I—IV sind übrigens nach der Form ihres Beweises sowohl für reelle als für imaginäre Schnittpuncte gültig.

## § 2.

## Anwendungen auf Curven vierter Ordnung.

**1)** »*Legt man durch die Puncte, in denen eine Curve* $4^{ter}$ *Ordnung* ($C_1$) *von einem Kegelschnitte K geschnitten wird, die Tangenten* $t_1 t_2 \ldots t_8$ *an* $C_4$, *so schneiden diese den zweifach gerechneten Kegelschnitt* ($K^2$) *noch in 16 Puncten, durch die sich ein Büschel von Curven* $4^{ter}$ *Ordnung* $C'_4$ *legen lässt. Die Puncte, in denen jede dieser Curven* $C'_4$ *und die gegebene Curve* $4^{ter}$ *Ordnung die Linien* $t_1 \ldots t_8$ *ausserhalb* $K^2$ *schneiden, liegen auf einer dritten Curve* $4^{ter}$ *Ord-*

*nung $C''_4$. Diese Curven $C''_4$ bilden entsprechend den Curven $C'_4$ ein zweites Büschel mit den 16 Puncten auf $C_4$ als Grundpuncten.«*

Der Beweis wird geführt, indem man $C_4$ durch 13 Schnittpuncte von $t_1 \dots t_8$ mit $K^2$ legt. Dann haben die beiden Curvensysteme 8^ter^ Ordnung $C_4 . C_4'$ und $t_1 \dots t_8$ mit der Curve vierter Ordnung $K^2$

$$29 = 8 . 4 - \frac{(4-1)(4-2)}{2}$$

Puncte gemein, also nach Satz III auch weitere 3. Ihre übrigen 32 Schnittpuncte liegen dann auf einer andern Curve 4^ter^ Ordnung $C_4''$. —

Statt dessen hätte man natürlich auch direct $C''_4$ durch 13 Puncte von $C_4$ und einen Punct von $C'_4$ auf $t_1 \dots t_8$ ausserhalb $K^2$ legen können, und die drei Systeme achter Ordnung $C_4 C'_4$, $t_1 \dots t_8$, $K^2\ C''_4$ betrachten können, die dann 43, also nach Satz II 21 weitere Puncte gemein haben. —

Analytisch zeigt dieser Satz die Darstellung der Curven 4^ter^ Ordnung in der Form

**2)** $$C_4 . C'_4 \equiv t_1 \dots t_8 + \lambda K^2 . C''_4,$$

eine Darstellungsweise, die derjenigen der Curven dritter Ordnung in der Form

$$C_3 \equiv t_1 t_2 t_3 + \lambda P^2 . Q$$

vollständig entspricht. —

Der hier auftretende Kegelschnitt K war gänzlich willkürlich. Ich wähle jetzt statt seiner einen durch fünf beliebige Wendepuncte der Curve 4^ter^ Ordnung gehenden Kegelschnitt, ziehe die fünf Wendetangenten $t_1 \dots t_5$ und lege durch die weiteren Schnittpuncte derselben mit der Curve 4^ter^ Ordnung einen zweiten Kegelschnitt $K_1$. Durch 14 fernere Schnittpuncte von $K^3$ mit $t_1 \dots t_5$ lege ich endlich eine zweite Curve 4^ter^ Ordnung $C'_4$, die also etwa $t_1 \dots t_4$ zu Wendetangenten, $t_5$ zur einfachen Tangente hat. Dann haben die beiden Curvensysteme 8^ter^ Ordnung $C_4 C'_4$ und $K^3 . K_1$ mit $t_1 \dots t_5$

$$34 = 8 . 5 - \frac{(5-1)(5-2)}{2}, \text{ also weitere 6 Puncte}$$

gemein, die auf $C'_4$ liegen müssen. Zugleich liegt einer von ihnen auf $K^3$, d. h. auch $t_5$ ist Wendetangente für $C'_4$, und die andern 5 liegen auf $K_1$. — Durch die übrigen 24 Schnittpuncte der beiden Curven 8^ter^ Ordnung geht dann nach III eine Curve dritter Ordnung $C_3$.

Dies liefert den Satz:

**3)** *»Legt man durch 5 Wendepuncte einer Curve 4^ter^ Ordnung einen Kegelschnitt K, durch die 5 weiteren Schnittpuncte der be-*

*treffenden Wendetangenten mit $C_4$ einen zweiten Kegelschnitt $K_1$, so giebt es eine Curve vierter Ordnung $C'_4$, die durch die ferneren Schnittpuncte von $K^3$ und $K_1$ mit $t_1 . . t_5$ geht, d. h. die diese Linien zu Wendetangenten mit Wendepuncten auf K hat, während ihre ferneren Schnittpuncte mit denselben auf $K_1$ liegen. Eine Curve $3^{ter}$ Ordnung $C_3$ berührt jede der Curven $C_4$ und $C'_4$ dreipunctig in ihren ferneren Schnittpuncten mit K und geht durch ihre weiteren Schnittpuncte mit $K_1$.«*

Durch diesen Satz erhält man die folgende analytische Darstellung der Curven vierter Ordnung:

**4)** $$C_4 . C'_4 = t_1 t_2 \ldots t_5 . C_3 + \lambda K^3 K_1 . —$$

Ich gehe jetzt über zum

§ 3.

## Beweis des Wendepunctsatzes für Curven vierter Ordnung,

der in der Einleitung auf S. 1 bereits genannt ist. —

Der soeben bewiesene Satz (3) hat auf eine Curve vierter Ordnung geführt, die zu den Kegelschnitten K und $K_1$ in genau demselben Verhältnisse steht wie die gegebene Curve $4^{ter}$ Ordnung selbst, und die daher auch alle diese Kegelschnitte betreffenden Eigenschaften der letzteren mit ihr theilen wird. Dies wird vor allem in Bezug auf die ferneren Schnittpuncte beider mit dem Kegelschnitte K der Fall sein, die nach dem Wendepunctsatze eben Wendepuncte sein sollen.

Es liegt daher nahe, diese Curve vierter Ordnung zum Beweise des genannten Satzes zu benutzen. Zieht man nämlich in den ferneren Schnittpuncten von $C_4$ mit K die Tangenten an $C_4$ ($t_6, t_7, t_8$), so hat man drei Curvensysteme achter Ordnung

$$t_1 \ldots . t_8 \; , \; C_4 . C'_4 \; , \; K^3 K_1,$$

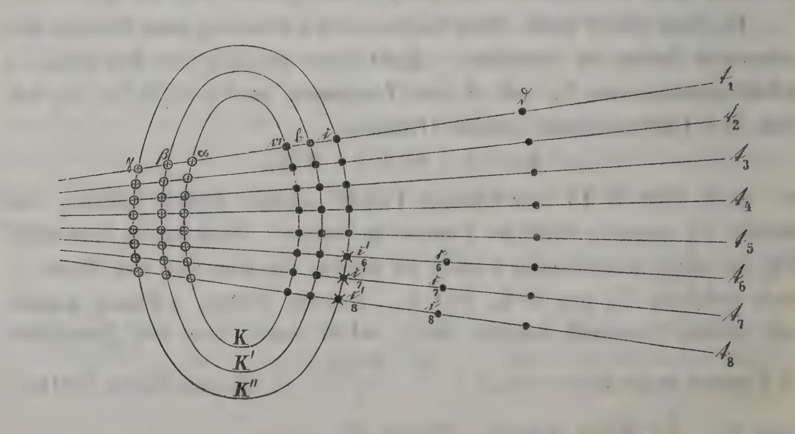
die nach Satz II 43 unabhängige Puncte gemein haben müssen, um weitere 21 gemeinschaftliche Puncte zu haben. Doch ist es nur möglich 40 solche unabhängige Puncte zu finden, da man von dem Satze 3), nach welchem $C'_4$ mit $K^3 K_1$ und $t_1 \ldots t_8$ noch weitere 6 Puncte gemein hat, keinen Gebrauch machen darf, indem sonst von den genannten 43 Puncten mehr als $34 = 8 . 5 - \frac{(5-1)(5-2)}{2}$ auf einer Curve $5^{ter}$ Ordnung ($t_1 \ldots t_5$) liegen würden. (Siehe II*)

Es ist daher nothwendig, zum Beweise des Wendepunctsatzes als ergänzende Curven solche höherer Ordnung zu Hülfe zu nehmen.

Ferner ist es zweckmässig,, sich den dreifach zu rechnenden Kegelschnitt durch die fünf Wendepuncte zunächst in drei verschiedene unendlich nahe Kegelschnitte $K, K', K''$ zerlegt zu denken.

Nennt man dann die Schnittpuncte von $K$ und $K'$ mit $C_4$, $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_8$ resp. $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_8$, so werden die Tangenten $t_1 \ldots t_8$ an $C_4$ durch die Linien $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$; ... $\mathfrak{a}_8 \mathfrak{b}_8$, dargestellt. Die ferneren Schnittpuncte derselben mit $C_4$ seien durch $\mathfrak{c}_1 \mathfrak{d}_1$; $\mathfrak{c}_2 \mathfrak{d}_2$; .... $\mathfrak{c}_8 \mathfrak{d}_8$, ihre weiteren Schnittpuncte mit $K$ und $K'$ durch $\alpha_1 \ldots \alpha_8$ resp. $\beta_1 \ldots \beta_8$ bezeichnet. Durch die Puncte $\mathfrak{c}_1 \ldots \mathfrak{c}_5$ sei nun ein dritter Kegelschnitt $K''$ gelegt, der die Linien $t_1 \ldots t_5$ noch in $\gamma_1 \ldots \gamma_5$, $t_6 t_7 t_8$ noch in resp. $\gamma_6$ und $\mathfrak{c}'_6$, $\gamma_7$ und $\mathfrak{c}'_7$, $\gamma_8$ und $\mathfrak{c}'_8$ schneidet, wo $\mathfrak{c}'_6 \mathfrak{c}'_7 \mathfrak{c}'_8$ diejenigen unter diesen Puncten sein mögen, welche bei einer Annäherung der Kegelschnitte $K, K', K''$ aneinander, in die Nähe von $(\mathfrak{a}_6, \mathfrak{b}_6)$, $(\mathfrak{a}_7, \mathfrak{b}_7)$, $(\mathfrak{a}_8, \mathfrak{b}_8)$ fallen.

Kann ich nun beweisen, dass $\mathfrak{c}'_6$, $\mathfrak{c}'_7$, $\mathfrak{c}'_8$ auch auf der Curve vierter Ordnung $C_4$ liegen, so erhalte ich, wenn die drei Kegelschnitte $K K' K''$ zusammenfallen, d. h. durch 5 Wendepuncte gehen, für jede ferneren Schnittpuncte derselben mit $C_4$ drei unendlich nahe in gerader Linie liegende Puncte d. h. einen Wendepunct[3]). Sobald diese Eigenschaft für einen der ferneren Schnittpuncte von $K$ mit $C_4$ bewiesen ist, so ist sie auch für alle drei bewiesen, und man kann daher zum Beweise des Wendepunctsatzes entweder alle 8 Tangenten $t_1 \ldots t_8$ oder nur 6, etwa $t_1 \ldots t_6$, verwenden.




[3]) wenn ich nämlich von dem Fall einer Tangente in einem Doppelpuncte, deren Existenz besondere Specialitäten verlangt, überhaupt absehe.

Ich wähle den Fall der 8 Tangenten, so wird es, wie aus dem früheren erhellt, vor Allem darauf ankommen, die Curve $4^{ter}$ Ordnung durch andere Curven so zu ergänzen, dass in dem sich ergebenden Schnittpunctsystem eine Anzahl von Puncten durch die übrigen bestimmt ist.

Lege ich also durch die 24 Puncte $\alpha\beta\gamma$, unter denen, wie ich annehme, keiner auf $C_4$ liege,[4]) eine Curve $6^{ter}$ Ordnung $C_6$, so habe ich drei Curvensysteme

$C_6 . C_4$ von der $10^{ten}$ Ordnung
$t_1 \ldots t_8$ von der $8^{ten}$ Ordnung
$K, K', K''$ von der $6^{ten}$ Ordnung,

die $$45 = 8 . 6 - \frac{(8+6-10-1)(8+6-10-2)}{2}$$

Puncte mit einander gemein haben, nämlich 1) die 24 Puncte $\alpha\beta\gamma$ auf $C_6$, 2) die 21 Puncte $a, b, c_1, \ldots c_5$ auf $C_4$; daher haben dieselben nach Satz IV drei weitere Durchschnittspuncte gemein, d. h. die Puncte $c'_6, c'_7, c'_8$ liegen auf $C_6 . C_4$. Um nun zu zeigen, dass diese drei Puncte auf $C_4$ liegen, hat man die Curve $C_6$, für deren Bestimmung erst 24 Puncte gewählt sind, endgültig so zu bestimmen, dass sie nicht durch die drei Puncte $c'_6\, c'_7\, c'_8$ oder wenigstens nicht durch einen derselben (etwa $c'_6$) hindurchgeht. Es ist nun undenkbar, dass alle durch die Puncte $\alpha\beta\gamma$ möglichen Curven $6^{ter}$ Ordnung ohne Ausnahme auch durch die drei Puncte $c'_6\, c'_7\, c'_8$ hindurchgehen. Dazu würden äusserst specielle Lagen der Puncte $\alpha\beta\gamma$ und der Puncte $c'_6\, c'_7\, c'_8$ erforderlich sein, die im vorliegenden Falle im Allgemeinen nicht eintreten können. — Selbst wenn z. B. die 24 Puncte $\alpha\beta\gamma$ (oder mehr als 21 von ihnen) auf einer Curve $4^{ter}$ Ordnung $C'_4$ liegen sollten, — wie sich in der That sogleich herausstellen wird — so lässt sich durch dieselben als Schnittpuncte dieser Curve $4^{ter}$ Ordnung mit der Curve $6^{ter}$ Ordnung $K\,K'\,K''$ nach Satz III noch eine sechsfach unendliche Schaar von Curven $6^{ter}$ Ordnung legen, also eine fünffach unendliche Schaar solcher Curen, die nicht durch die Puncte $c'_6, c'_7, c'_8$ hindurchgehen. Uebrigens kann man natürlich bei dieser Voraussetzung die Curve $4^{ter}$ Ordnung $C'_4$ selbst als ergänzende Curve benutzen. —

Hat man nun eine Curve $6^{ter}$ Ordnung $C_6$, welche durch die 24 Puncte $\alpha\beta\gamma$ geht, ohne etwa $c'_6$ zu enthalten, so wähle man diese zur ergänzenden Curve. Dann muss der Punct $c'_6$, der wie vorher bewiesen auf $C_4 . C_6$ liegt, nothwendig auf $C_4$ liegen, da er bei der eben getroffenen Wahl von $C_6$ auf dieser Curve nicht liegen kann.

[4]) Ist dies der Fall, so treten wieder besondere Singularitäten ein.

Es fällt also $c'_6$ mit $c_6$ oder $b_0$ zusammen. Das entsprechende lässt sich für die Puncte $c'_7, c'_8$ nachweisen, und ist damit, wenn man die drei Kegelschnitte $K, K', K''$ zusammenfallen lässt, der Satz bewiesen:

**5)** *»Ein durch fünf Wendepuncte einer (allgemeinen) Curve $4^{ter}$ Ordnung gelegter Kegelschnitt schneidet dieselbe in drei weiteren Wendepuncten.«*

Bemerkungen: 1) Da man zur definitiven Bestimmung von $C_6$ noch über drei Puncte zu verfügen hat, so kann man diese von vorn herein so wählen, dass $C_6$ mit einer der Linien t, etwa mit $t_6$, schon sechs von $c'_6$ verschiedene Puncte gemein hat, so dass es also, ohne diese Linie als Theilgebilde zu enthalten, keinen weiteren Punct mit ihr gemeinschaftlich haben kann. Man braucht zu diesem Zwecke nur die genannten drei Puncte beliebig auf $t_6$, aber ausserhalb $K, K', K''$ anzunehmen, und hat dann den nicht schwierigen Nachweis zu führen, dass die so bestimmte Curve $6^{ter}$ Ordnung die Linie $t_i$ im Allgemeinen nicht als Factor enthält.

2) Statt von dem Satze IV Gebrauch zu machen, hätte man auch beliebig einen der Sätze II und III benutzen können. Man hätte dann nur nöthig gehabt, $K^3$ vermittelst einer durch 14 noch nicht benutzte Schnittpuncte von $C_6 . C_4$ mit $t_1 \ldots t_8$ gelegten Curve $4^{ter}$ Ordnung, und $t_1 \ldots t_8$ vermittelst eines etwa durch 5 fernere Schnittpuncte von $C_6$ mit $K^3$ gelegten Kegelschnittes $K_0$ zu Curven $10^{ter}$ Ordnung zu ergänzen. —

3) Der Beweis ist hier nur für allgemeine Curven $4^{ter}$ Ordnung geführt worden. Weiter unten (§ 10) werden einige specielle Fälle behandelt werden. —

Ist nun der Satz 5) bewiesen, so lege man durch 14 weitere Schnittpuncte der acht Wendetangenten mit dem dreifach gerechneten Kegelschnitt $K^3$ eine zweite Curve $4^{ter}$ Ordnung $C'_4$. Dann haben die beiden Curven $8^{ter}$ Ordnung

$$C_4 . C'_4 \text{ und } t_1 \ldots t_8$$

mit der Curve $6^{ter}$ Ordnung $K^3$

$$38 \text{ oder } 8 . 6 - \frac{(6-1)(6-2)}{2} \text{ Puncte, also auch (nach III)}$$

weitere 10 gemein, d. h.:

**6)** *»Die Curve $C'_4$ hat die Linien $t_1 \ldots t_8$ gleichfalls zu Wendetangenten, und die diesen zugehörigen Wendepuncte liegen auf dem Kegelschnitte K. Die ferneren Durchschnittspuncte von $C_4 C'_4$ mit $t_1 \ldots t_8$ liegen dann auf einem Kegelschnitte $K_1$, der also durch die weiteren Schnittpuncte der 8 Wendetangenten sowohl mit $C_4$ als mit $C'_4$ hindurchgeht.«*

Ich werde mich im Folgenden für die Kegelschnitte K und $K_1$ der Ausdrücke „Wendekegelschnitt" und „ergänzender Kegelschnitt," für die Curve $C'_4$ der Bezeichnung „zugeordnete Curve ($4^{ter}$ Ordnung)" bedienen.

Aus 6) ergiebt sich weiter die folgende wichtige analytische Darstellung einer Curve $4^{ter}$ Ordnung in Verbindung mit einer ihrer zugeordneten Curven:

7) $$C_4 . C'_4 \equiv t_1 \ldots t_8 + \lambda K^3 K_1,$$

eine Darstellung, die man als Erweiterung der beiden unter No. 2 und 4 angeführten betrachten kann. — Sie ist derjenigen der Curven $3^{ter}$ Ordnung in der Form

$$C_3 \equiv t_1 t_2 t_3 + \lambda P^3$$

vollständig analog. — (s. § 8).

## § 4.

## Beweis des Wendepunctsatzes für Curven vierter Ordnung mit Hülfe des Carnotschen Theorems.[5])

Das Carnot'sche Theorem lautet:

8) „Schneidet eine Curve $n^{ter}$ Ordnung die Seiten eines Polygons (m-Ecks)

$$a_m a_1, a_1 a_2, \ldots a_{m-1} a_m$$

beziehlich in den Puncten

$$a_{11}, a_{12} \ldots a_{1n}; a_{21}, a_{22} \ldots a_{2n}; \ldots a_{m1}, a_{m2} \ldots a_{mn},$$

so besteht immer die Gleichung

$$\prod_{h=1\ldots m,\, i=1\ldots n} \frac{a_{hi}\, a_h}{a_{hi}\, a_{h-1}} = (-1)^{mn} \text{"}\ ^{6)}.$$

Aus m geraden Linien lassen sich nun für $(m > 2)$ $3 . 4 \ldots (m-1)$ Polygone herleiten. Sind nun auf jeder dieser Graden n Puncte $(n < m)$ gegeben, so lässt sich durch $\frac{n(n+3)}{2}$ von diesen mn Puncten eine Curve $n^{ter}$ Ordnung legen.

„Besteht dann die Gleichung 8) für mindestens $mn - \frac{n(n+3)}{2}$ Polygone, so liegen die sämmtlichen mn Puncte auf einer Curve $n^{ter}$ Ordnung."

Indem ich mich beim Beweise der Einfachheit wegen ganz der Be-

---

5) Dieser Beweis ist im Grunde kein anderer als der frühere, nur in einer andern, nicht uninteressanten Form.

6) Vergl. Cremona, Einleitung in eine geometr. Theorie der eb. C. § 8, No. 38 ff.

zeichnungen und Entwickelungen des vorigen Paragraphen bediene, erhalte ich zunächst, wenn ich setze

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{a}_1 a_1 . \mathfrak{a}_2 a_2 \ldots \mathfrak{a}_8 a_8}{\mathfrak{a}_1 a_8 . \mathfrak{a}_2 a_1 \ldots \mathfrak{a}_8 a_7}, \text{ etc.}$$

1) $\mathfrak{A} . \mathfrak{B} . \mathfrak{C} . \mathfrak{D} = 1$,

da die Puncte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ auf einer Curve 4[ter] Ordnung liegen; ebenso, wenn ich durch $\delta, \varepsilon, \zeta$ die weiteren Schnittpuncte der Curve 6[ter] Ordnung mit den Linien $t_1 \ldots t_8$ bezeichne

2) $AB\Gamma\Delta EZ = 1$,

da die Puncte $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ auf einer Curve 6[ter] Ordnung liegen.

3) $\mathfrak{A} A = 1$, da $\mathfrak{a}$ und $\alpha$ auf K liegen etc.

4) $\mathfrak{B} B = 1$,

5) $\mathfrak{C}_{1 \ldots 5} \mathfrak{C}_{678} . \Gamma = 1 \left( \text{wo } \mathfrak{C}_i = \frac{\mathfrak{c}_i a_i}{\mathfrak{c}_i a_{i-1}} \right)$

Durch Multiplication von 1) und 2) folgt mit Rücksicht auf 3) und 4)

6) $\mathfrak{C}\mathfrak{D}\Gamma\Delta E Z = 1$,

eine Gleichung, welche nach der Umkehr des Carnot'schen Theorems aussagt, dass die Puncte $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ auf einer Curve 6[ter] Ordnung liegen. Diese Curve 6[ter] Ordnung hat nun aber mit dem Kegelschnitte K'' (Gl. 5) 13 Puncte $(\mathfrak{c}_1 \ldots \mathfrak{c}_5, \gamma_1 \ldots \gamma_8)$ gemein, zerfällt also in diesen und eine Curve 4[ter] Ordnung, und es müssen von den Puncten

$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ drei mit $\mathfrak{c}'_6, \mathfrak{c}'_7, \mathfrak{c}'_8$

zusammenfallen. Betrachte ich nun eine der Linien t, etwa $t_6$, so kann von den auf ihr liegenden Punkten

1) $\gamma_6$ nicht mit $\mathfrak{c}'_6$ zusammenfallen

2) wenn $C_6$ zweckmässig gelegt ist, auch nicht $\delta_6, \varepsilon_6, \zeta_6$. Es bleiben somit als einzige Puncte die Puncte $\mathfrak{c}_6$ und $\mathfrak{d}_6$ übrig. Das Zusammenfallen eines dieser beiden Puncte mit $\mathfrak{c}'_6$ sagt aber aus, dass $\mathfrak{c}'_6$ auf der Curve 4[ter] Ordnung $C_4$ liegt: womit nach dem Früheren der Wendepunctsatz bewiesen ist. —

Der Carnot'sche Satz verlangt einige Modificationen in den folgenden Fällen:[7]) 1) wenn einer der Eckpuncte a auf der Curve liegt, und 2) wenn zwei der Seiten des Polygons parallel werden. Doch kann man von beiden absehen, weil der erstere Fall, wo sich also zwei von den Tangenten $t_1 \ldots t_8$ auf der Curve schneiden müssten, eine Bedingung zwischen den Coefficienten der Curve voraussetzen würde, die wir ausschliessen, und der zweite, da es sich um projectivische Eigenschaften der Curven handelt, durch Projection der ganzen Figur vermieden werden kann.

---

[7]) Siehe Salmon, h. eb. Curv. S. 132.

§ 5.

## Ueber das System von Kegelschnitten durch die 24 Wendepuncte.

Die Wendepuncte einer Curve 4ter Ordnung ($C_4$) ergeben sich als Durchschnittspuncte derselben mit einer Curve 6ter Ordnung (H), ihrer Hesseschen Curve. Legt man nun durch 21 von diesen Wendepuncten eine beliebige Curve 6ter Ordnung ($C_6$), so enthält dieselbe nach Satz III auch weitere drei; und zu ihrer endgültigen Bestimmung sind noch 6 fernere Puncte nöthig d. h.

**9)** »*Durch die 24 Wendepuncte einer Curve 4ter Ordnung lässt sich eine sechsfach unendliche Schaar von Curven 6ter Ordnung legen.*«

Die ferneren Durchschnittspuncte je zweier dieser Curven 6ter Ordnung liegen auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$. Man hat daher als Darstellungsform derselben den Ausdruck

$$C_6 \equiv H + \mathfrak{K} . C_4 = 0 . -$$

Durch 24 Puncte können nun im Allgemeinen so viele Kegelschnitte gelegt werden, als dieselben sich zu fünfen gruppiren lassen d. h.

$$24^{\cdot 5} \equiv \frac{24.23.22.21.20}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}.$$

Da nun aber ein durch fünf Wendepuncte gelegter Kegelschnitt (nach 5) stets drei weitere enthält, so fallen von diesen Kegelschnitten stets so viele zusammen, als 8 Puncte Combinationen ohne Wiederholung (o. W.) zur 5ten Classe zulassen; die obige Zahl ist also noch durch

$$8^{\cdot 5} \equiv \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}$$

**10)** zu dividiren, und man erhält für die wirkliche Zahl der durch die 24 Wendepuncte gehenden Kegelschnitte *759*.

Durch e i n e n bestimmten Wendepunct gehen von diesen Kegelschnitten so viele, als 23 Puncte Combinationen o. W. zur 4ten Classe zu lassen, wenn man die so erhaltene Zahl noch durch die Combinationen o. W. von 7 Elementen zur selben Classe dividirt d. h.

$$23^{\cdot 4} : 7^{\cdot 4} \equiv \frac{23.22.21.20}{7.\ 6.\ 5.\ 4} = 253$$

Ebenso erhält man für die Zahl der durch zwei bestimmte Wendepuncte gehenden Kegelschnitte

$$22^{\cdot 3} : 6^{\cdot 3} = 77.$$

Durch drei Wendepuncte gehen

$$21^{\cdot 2} : 5^{\cdot 2} = 21, \text{ und}$$

durch vier Wendepuncte

$$20^{\cdot 1} : 4^{\cdot 1} = 5 \text{ Kegelschnitte.}$$

In Bezug auf diese letzteren fünf Kegelschnitte ist zu bemerken, dass dieselben alle 24 Wendepuncte enthalten. —

Ich fasse jetzt einen bestimmten Wendekegelschnitt K ins Auge, der etwa durch die Wendepuncte (1, 2 . . . 8) hindurchgeht; dann lässt sich durch die noch fehlenden 16 Wendepuncte ein Büschel von Curven $4^{ter}$ Ordnung legen, da eine durch 13 von denselben gelegte Curve $4^{ter}$ Ordnung zusammen mit K eine Curve $6^{ter}$ Ordnung bildet, die mit H und $C_4$ 21, also auch weitere drei Puncte gemein hat. — Dieses Büschel $4^{ter}$ Ordnung enthält nun eine Schaar von Kegelschnittpaaren, und demgemäss die Curve $H + \mathfrak{K} C_4$ eine Schaar von Kegelschnitttripeln.

Diese Behauptung ist als richtig erwiesen, sobald gezeigt ist, dass es einen Kegelschnitt K′ giebt, welcher durch acht von den Puncten 9 . . . . 24 hindurchgeht; denn dann geht durch die acht noch fehlenden gleichfalls ein Kegelschnitt.

Um dies nun nachzuweisen und zugleich eine Uebersicht über die 759 Wendekegelschnitte zu gewinnen, theile ich dieselben in folgende sechs Gruppen ein:

I. den Kegelschnitt K durch die Puncte 1 . . . 8,

II. diejenigen Kegelschnitte, welche vier und nur vier von den Puncten 1 . . . 8 enthalten,

III. solche, die drei und nur drei,

IV. solche, die zwei und nur zwei,

V. solche, die einen und nur einen,

VI. solche, die keinen der Puncte 1 . . . 8 enthalten.

Die Gruppe II besteht aus viermal so viel Kegelschnitten als 8 Puncte Combinationen o. W. zur $4^{ten}$ Classe zulassen, da jeder Kegelschnitt durch vier der Puncte 1 . . . 8 und einen weiteren bestimmt ist, und sich durch jede vier Wendepuncte (nach dem früheren) fünf Kegelschnitte legen lassen, d. h. nach Abzug von K noch 4. Es gehören also der $II^{ten}$ Gruppe $\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \times 4 = 280$ Kegelschnitte an. —

Von der $III^{ten}$ Art giebt es keinen Kegelschnitt. — Denn durch drei Wendepuncte (1, 2, 3) gehen 21 Kegelschnitte. Diese zerfallen aber 1) in den Kegelschnitt K, 2) in solche Kegelschnitte, die ausser den gegebenen drei Puncten (1, 2, 3) noch einen vierten der Puncte 1 . . . . 8 enthalten. Da nun die Puncte 1 2 3 fünfmal mit einem weiteren der Puncte 1 . . . 8 verbunden vorkommen können, und durch jede vier von diesen Puncten, abgesehen von K, noch vier Kegelschnitte gehen, so ist die Zahl dieser Kegelschnitte, die der $II^{ten}$ Gruppe angehören, $= 4 . 5$ oder $= 20$, und gehören also alle durch die 3 Puncte 1 2 3

gelegten Wendekegelschnitte der I$^{ten}$ oder II$^{ten}$ Gruppe an.[8]) Hieraus folgt zugleich der Satz:

**11)** *»Zwei Wendekegelschnitte, die drei Wendepuncte gemein haben, haben stets noch einen vierten gemein.«*

Um die Zahl der Kegelschnitte der IV$^{ten}$ Gruppe zu finden, stelle ich folgende Betrachtung an. Durch zwei bestimmte Wendepuncte (1, 2) gehen (nach 10) 77 Kegelschnitte hindurch. Unter diesen ist 1) der Kegelschnitt K befindlich, 2) solche, die noch zwei von den Puncten 3 . . 8 enthalten. Die Anzahl dieser ist aber, da sich aus sechs Puncten (3 . . . 8) 15 Combinationen o. W. zur 2$^{ten}$Classe bilden lassen, und da durch vier Wendepuncte, abgesehen von K, vier Wendekegelschnitte hindurchgehen $= 4 . 15$ oder $= 60$. Die Differenz liefert $77 - 60 - 1 = 16$ als Zahl der Kegelschnitte, die durch die Puncte 1, 2 gehen, ohne einen weiteren der Puncte 1 . . . 8 zu enthalten. Um die Gesammtzahl aller Kegelschnitte der IV$^{ten}$ Gruppe zu erhalten, hat man also 16 noch mit $\frac{8 . 7}{1 . 2} = 28$ zu multipliciren, und findet so für die verlangte Zahl $28 \times 16 = 448$. — [9])

Die V$^{te}$ Gruppe enthält wieder keinen Kegelschnitt. — Denn durch einen bestimmten Punct (1) gehen 253 Kegelschnitte. Diese zerfallen in folgende Arten: 1) den Kegelschnitt K, 2) solche Kegelschnitte, die ausser 1 noch drei von den Puncten 2 . . . 8 enthalten. Die Zahl derselben ist $\frac{7 . 6 . 5}{1 . 2 . 3} \times 4 = 140$, da durch jede vier dieser Puncte ausser K noch vier Kegelschnitte gehen; 3) solche Kegelschnitte, die noch einen der Puncte 2 . . . . 8 enthalten. Dies sind $7 \times 16 = 112$, da durch zwei von den Puncten 1 . . . 8 16 Kegelschnitte gehen, die keinen dieser Puncte mehr enthalten. —

Die Summe der gefundenen Zahlen ist $= 253$, d. h. gleich der Zahl aller, durch den Punct 1 überhaupt möglichen Kegelschnitte (s. 10), und giebt es also keinen Kegelschnitt, der einen und nur einen der Puncte 1 . . . 8 enthielte, oder

**12)** *„Zwei Wendekegelschnitte, die einen Wendepunct gemein haben, haben stets noch einen zweiten gemein.“*

---

[8]) Man sieht dasselbe sofort ein, wenn man die durch die Puncte 1 2 3 und einen der Puncte 9 . . . 24, etwa 9 gehenden Kegelschnitte wirklich bildet. — Diese fünf Kegelschnitte enthalten nämlich alle 24 Wendepuncte (s. vor. S. oben), also auch die Puncte 4 5 6 7 8, und zwar muss auf jedem derselben einer dieser Puncte liegen, da, sobald einer von ihnen mehr, etwa zwei derselben enthielte, er mit K identisch würde und ausser den Puncten 1 . . . 8 noch den Punct 9 enthalten, also 9 Puncte mit der Curve 4$^{ter}$ Ordnung gemein haben müsste, was unmöglich ist. —

[9]) Vergleiche das Schema auf Seite 19 und 20.

Die Zahl der bisher gefundenen Kegelschnitte ist gleich

$$1+280+448=729,$$

während die Gesammtzahl der Wendekegelschnitte 759 beträgt. — Es bleiben also für die VI^te Gruppe, deren Kegelschnitte keinen der Puncte 1...8 enthalten, noch *30* übrig. —[10])

Diese 30 Kegelschnitte gruppiren sich paarweise so, dass jedes Paar die 16 Wendepuncte 9....24 vollständig enthält. Diese 15 Paare von Kegelschnitten sind zugleich auch die zerfallenden Curven 4^ter Ordnung durch die genannten 16 Puncte. — Jedes derselben bildet zusammen mit K ein Kegelschnitttripel, in das der Ausdruck $H+\mathfrak{K}.C_4$ zerlegt werden kann. Um die Gesammtzahl solcher Tripel zu finden, hat man die Zahl aller Kegelschnitte, 759, mit 15 zu multipliciren, und da jedes derselben dreimal vorkommt, mit 3 zu dividiren. Dies liefert 3795 Tripel.

Die Höhe der gefundenen Zahlen im Gegensatze zu den analogen in der Theorie der Curven dritter Ordnung weist auf die grossen Schwierigkeiten hin, die sich bei einer analytischen Behandlung des Wendepunctproblems der Curven 4^ter Ordnung muthmasslich darbieten werden. Sind bei den Curven 3^ter Ordnung die Tripel von geraden Linien, welche durch die 9 Wendepuncte gehen, nur von einem unbestimmten Coefficienten abhängig und durch eine Gleichung 4^ten Grades gegeben, so ist das entsprechende Problem hier von sechs unbestimmten Coefficienten abhängig, die auf 3795 verschiedene Weisen bestimmt werden können. — Ist damit bei den Curven 3^ter Ordnuug das Problem der Auffindung der 9 Wendepuncte auf die oben genannte Gleichung 4^ten Grades und Gleichungen 3^ten Grades zurückgeführt, so scheint man hier auf eine entsprechende Reduction der analogen Aufgabe verzichten zu müssen.

Es ist übrigens, besonders wenn man sich der beiden Sätze 11) und 12) erinnert, nicht schwierig, ein Schema sämmtlicher 759 Wendekegelschnitte wirklich zu bilden. Um eine Uebersicht über dieselben zu gewinnen, genügt es indessen, die in vorerwähnter Weise zu einem bestimmten Kegelschnitte K (1,2,...8) in Beziehnung stehenden Kegelschnitte aufzustellen. —

Im Folgenden sind unter II. alle die (60) Kegelschnitte, welche die Puncte 1, 2 und zwei weitere der Wendepuncte von K enthalten, unter III. diejenigen (16), welche ausser 1 und 2 keinen weiteren dieser Wendepuncte enthalten, und unter IV. endlich diejenigen 30 Kegelschnitte verzeichnet, welche überhaupt keinen der Wendepuncte 1....8 enthalten.

---

[10]) Vergleiche das Schema auf Seite 20.

## Schema der Wendekegelschnitte.

I.

| |
|---|
| 1 2 3 4 5 6 7 8 |

II.

| | | |
|---|---|---|
| 1 2 3 4 9 10 11 12<br>13 14 15 16<br>17 18 19 20<br>21 22 23 24 | 1 2 3 5 9 13 17 21<br>10 14 20 23<br>11 15 18 24<br>12 16 19 22 | 1 2 3 6 9 14 18 22<br>10 13 19 24<br>11 16 17 23<br>12 15 20 21 |
| 1 2 3 7 9 15 19 23<br>10 16 18 21<br>11 13 20 22<br>12 14 17 24 | 1 2 3 8 9 16 20 24<br>10 15 17 22<br>11 14 19 21<br>12 13 18 23 | 1 2 4 5 9 14 19 24<br>10 13 18 22<br>11 16 20 21<br>12 15 17 23 |
| 1 2 4 6 9 13 20 23<br>10 14 17 21<br>11 15 19 22<br>12 16 18 24 | 1 2 4 7 9 16 17 22<br>10 15 20 24<br>11 14 18 23<br>12 13 19 21 | 1 2 4 8 9 15 18 21<br>10 16 19 23<br>11 13 17 24<br>12 14 20 22 |
| 1 2 5 6 9 10 15 16<br>11 12 13 14<br>17 20 22 24<br>18 19 21 23 | 1 2 5 7 9 12 18 20<br>10 11 17 19<br>13 16 23 24<br>14 15 21 22 | 1 2 5 8 9 11 22 23<br>10 12 21 24<br>13 15 19 20<br>14 16 17 18 |
| 1 2 6 7 9 11 21 24<br>10 12 22 23<br>13 15 17 18<br>14 16 19 20 | 1 2 6 8 9 12 17 19<br>10 11 18 20<br>13 16 21 22<br>14 15 23 24 | 1 2 7 8 9 10 13 14<br>11 12 15 16<br>17 20 21 23<br>18 19 22 24 |

III.

| | | |
|---|---|---|
| 1 2 9 10 17 18 23 24<br>19 20 21 22 | 1 2 9 11 13 16 18 19<br>14 15 17 20 | 1 2 9 12 13 15 22 24<br>14 16 21 23 |
| 1 2 10 11 13 15 21 23<br>14 16 22 24 | 1 2 10 12 13 16 17 20<br>14 15 18 19 | 1 2 11 12 17 18 21 22<br>19 20 23 24 |
| 1 2 13 14 17 19 22 23<br>18 20 21 24 | 1 2 15 16 17 19 21 24<br>18 20 22 23 | |

IV.

| | |
|---|---|
| 9 10 11 12 13 14 15 16<br>17 18 19 20<br>21 22 23 24 | 17 18 19 20 21 22 23 24<br>13 14 15 16 21 22 23 24<br>17 18 19 20 |
| 9 10 13 14 17 20 21 23<br>18 19 22 24 | 11 12 15 16 18 19 22 24<br>17 20 21 23 |
| 9 10 15 16 17 20 22 24<br>18 19 21 23 | 11 12 13 14 18 19 21 23<br>17 20 22 24 |
| 9 11 13 15 17 18 21 24<br>19 20 22 23 | 10 12 14 16 19 20 22 23<br>17 18 21 24 |
| 9 11 14 16 17 18 22 23<br>19 20 21 24 | 10 12 13 15 19 20 21 24<br>17 18 22 23 |
| 9 12 13 16 17 19 21 22<br>18 20 23 24 | 10 11 14 15 18 20 23 24<br>17 19 21 22 |
| 9 12 14 15 17 19 23 24<br>18 20 21 22 | 10 11 13 16 18 20 21 22<br>17 19 23 24 |

Nach dem Satze 6) gehört zu jedem Wendekegelschnitt ein Kegelschnitt, der durch die ferneren Schnittpuncte der Wendetangenten mit der Curve $4^{ter}$ Ordnung geht. Diese Kegelschnitte bilden demgemäss ein System ganz von derselben Art wie die Wendekegelschnitte selbst, und sind auch in Anbetracht der reellen und imaginären Verhältnisse mit diesen vollständig gleichgestellt, da jedem reellen Wendepunct auch ein weiterer reeller Schnittpunct seiner Wendetangente mit der Curve $4^{ter}$ Ordnung entspricht. —

**13)** Ferner ist klar, „dass sich ebenso, wie durch die 24 Wendepuncte, auch durch die ferneren Schnittpuncte der Wendetangenten mit der gegebenen Curve eine s e c h s f a c h u n e n d l i c h e Schaar von Curven $6^{ter}$ Ordnung legen lässt.“[11]) Man beweist dies entweder direct, indem man durch 21 von den 24 besagten Puncten eine Curve $6^{ter}$ Ordnung $C_6$ legt, und dann die Durchschnitte der beiden Curven $24^{ter}$ Ordnung $t_1 \dots t_{24}$ (Product der 24 Wendetangenten) und $H^3 . C_6$ (wo H die Hessesche Curve bedeutet) mit der gegebenen Curve $4^{ter}$ Ordnung ($C_4$) betrachtet. — Die genannten Curven haben dann mit $C_4$ 93, also auch 3 weitere Puncte gemein, die auf $C_6$ liegen. Oder man benutzt direct

---

11) Es wäre wünschenswerth für eine dieser Curven $6^{ter}$ Ordnung eine ähnliche einfache Definition zu haben, wie für die Hessesche Curve.

die Analogie der genannten Puncte mit den Wendepuncten, indem sich durch dieselben, ebenso wie durch die letzteren, Tripel von Kegelschnitten, (d. h. Curven $6^{ter}$ Ordnung) legen lassen, mithin jede durch 21 von diesen Puncten gelegte Curve $6^{ter}$ Ordnung auch durch die übrigen 3 hindurchgeht. Zu ihrer endgültigen Bestimmung bleiben noch 6 Puncte zu wählen. —

Nach Satz 6) ist nun weiter der Curve $4^{ter}$ Orduung ($C_4$) in Bezug auf jeden Wendekegelschnitt K und den ergänzenden $K_1$ eine andere Curve derselben Ordnung ($C'_4$) zugeordnet, welche die bezüglichen acht Wendetangenten von $C_4$ gleichfalls zu Wendetangenten hat, während die zugehörigen Wendepuncte von $C'_4$ auf K und die weiteren Schnittpuncte der Wendetangenten mit derselben Curve auf $K_1$ liegen. Die Zahl dieser zugeordneten Curven ist daher gleich der Zahl der Wendekegelschnitte d. h. = 759. —

Unter den Wendepuncten und den ihnen zugehörigen Kegelschnitten und zugeordneten Curven nehmen selbstverständlich die reellen eine bevorzugte Stellung ein.

Zu ihrer Betrachtung gehe ich jetzt über.

## § 6.

## Ueber die Realität der Wendepuncte.

Die Wendepuncte der Curven $4^{ter}$ Ordnung werden als Durchschnittspuncte derselben mit ihrer Hesseschen Curve durch eine Gleichung $24^{ten}$ Grades bestimmt; es wird also, da in jeder Gleichung imaginäre Wurzeln paarweise vorkommen, die Zahl der imaginären, und damit auch die der reellen Wendepuncte stets eine gerade sein. — Legt man nun durch fünf reelle Wendepuncte einen Kegelschnitt, so ist dieser selbst reell, und muss also mindestens noch einen reellen Schnittpunct mit der Curve $4^{ter}$ Ordnung (diese natürlich selbst als reell vorausgesetzt) gemein haben, d. h. nach dem Wendepunctsatze mindestens noch einen reellen Wendepunct enthalten. — Ich werde nun zeigen, dass

**14**) *„von den 24 Wendepuncten einer Curve $4^{ter}$ Ordnung höchstens 8 reell sein können."*

Denn angenommen, es seien mehr reell, etwa zehn, so muss nach dem eben gesagten auf dem durch die fünf reellen Wendepuncte 1 2 3 4 5 gelegten Kegelschnitt K mindestens noch ein sechster reeller Wendepunct (6) liegen. Die beiden andern auf ihm gelegenen Wendepuncte (7, 8) sind entweder auch reell, oder imaginär. — Ist zunächst das erstere der Fall, so müssen die beiden noch übrigen reellen Wendepuncte (9, 10) auf einem und demselben Kegelschnitte (1 2 3 4 9 10)

liegen. Bilde ich nun etwa, wie im Schema S. 19 u. 20, die Kegelschnitte

1 2 3 5 9, 1 2 3 6 9, 1 2 3 7 9, 1 2 3 8 9,

so muss auf jedem derselben noch ein reeller Wendepunct liegen, und zwar ein neuer, da dieser Kegelschnitt sonst mit K zusammenfallen, also mit $C_4$ mehr als acht Puncte gemein haben müsste. — Es seien diese neuen Wendepuncte etwa mit 13, 14, 15, 16 bezeichnet. Bilde ich dann noch die Kegelschnitte

1 2 5 6 9, 1 2 5 7 9, 1 2 5 8 9,

so müssen dieselben wieder wenigstens zwei neue reelle Wendepuncte enthalten, etwa 11 und 12.[12])

Aehnlich verfährt man, wenn die Puncte 7 und 8 imaginär und statt ihrer etwa 13 und 14 reell sind, die beide auf dem Kegelschnitt 1 2 3 4 13 14 liegen. Um dann neue reelle Wendepuncte zu erhalten, bilde man z. B. die Kegelschnitte 1 2 3 5 9, 1 2 4 5 9, 1 3 4 5 9. Sind die auf den ersteren beiden gelegenen ferneren reellen Wendepuncte, resp. 13 und 14, so muss auf dem dritten schon ein neuer, etwa 15 liegen etc. — Auch hier lässt sich zeigen, dass die Realität von 10 Wendepuncten die von mindestens sechs weiteren zur Folge hat. —

Diese 16 Wendepuncte sind nun von der Art, dass die acht noch fehlenden (17...24) auf einem und demselben Kegelschnitt liegen. Es lassen sich, nach dem früheren, durch dieselben daher 1) 30 Kegelschnitte legen, die jeder 8 von diesen 16 Wendepuncten enthalten und 2) 448 solche, die jeder 6 von den Wendepuncten 1...16 enthalten. — Ein derartiges System von Kegelschnitten durch 16 Puncte ist aber unmöglich, wenn dieselben alle reell sind, d. h. es können höchstens 8 Wendepuncte reell sein.

Sind aber 8 Wendepuncte (1...8) reell, so liegen sie alle auf einem und demselben Kegelschnitt. Um dies zu zeigen, bilde man die Kegelschnitte 1 2 3 4 5 und 1 2 3 4 6. Sind 7 und 8 die auf diesen resp. liegenden weiteren reellen Wendepuncte, so bilde man den Kegelschnitt 1 2 3 5 8 auf dem gleichfalls noch ein reeller Wendepunct liegen muss, und da dies nur einer der Puncte 4, 6 oder 7 sein kann, so folgt hieraus das Zusammenfallen der drei Kegelschnitte.

Der so eben bewiesene Satz, dass eine Curve 4ter Ordnung höchstens 8 reelle Wendepuncte haben kann, ist schon von Herrn Zeuthen vor Kurzem[13]) auf directere und elegantere Weise aus der Theorie der Doppeltangenten abgeleitet, weshalb ich den Beweis im Folgenden kurz recapitulire.

---

[12]) Wählt man die neuen Wendepuncte anders, so kann man erreichen, dass alle 24 Wendepuncte reell werden, wodurch sich der Beweis noch einfacher gestalten würde. — Ich habe den ungünstigsten Fall gewählt.

[13]) in seiner Abhandlung: „Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre,“ die sich im VII. Bande der Mathem. Annalen (S. 415 ff.) abgedruckt findet.

Herr Zeuthen unterscheidet reelle Doppeltangenten „der ersten“ und „der zweiten Art“, je nachdem ihre Berührungspuncte einem und demselben oder verschiedenen Zügen einer Curve angehören, und weist nach, dass die Zahl der ersteren Doppeltangenten (zu denen auch die mit imaginären Berührungspuncten gerechnet werden) für Curven vierter Ordnung ohne singuläre Puncte stets gleich vier ist. An jedem paarigen Zuge — und Curven gerader Ordnung haben nur solche — ist aber die Zahl der reellen Wendepuncte eben so gross als die Zahl reeller Berührungspuncte von Doppeltangenten der ersten Art; daher kann die Zahl der reellen Inflexionen höchstens acht betragen. —

Die Zahl der reellen Wendepuncte kann hiernach $=0, 2, 4, 6$ oder 8 sein. In den beiden letzten Fällen ist der Kegelschnitt durch die reellen Wendepuncte vollständig bestimmt, und selbst, ebenso wie der ergänzende Kegelschnitt und die zugeordnete Curve reell. — Aber auch in dem Falle von vier reellen Wendepuncten muss durch dieselben mindestens ein reeller Wendekegelschnitt gehen, da die durch vier Wendepuncte gehenden Kegelschnitte durch eine Gleichung fünften Grades bestimmt werden, die in Folge der Realität der vier Wendepuncte reelle Coefficienten hat, und daher mindestens eine reelle Wurzel enthalten muss.

Die ferneren 4 Schnittpuncte dieses reellen Kegelschnittes mit der Curve $4^{ter}$ Ordnung sind vier paarweise conjugirt imaginäre Puncte. Dasselbe gilt von dem ergänzenden Kegelschnitt.

Für die zugeordnete Curve $4^{ter}$ Ordnung ($C'_4$) sind damit in diesem Falle bereits 16 reelle Puncte bekannt, nämlich die Schnittpuncte der Linien $t_1\, t_2\, t_3\, t_4$ mit $K^3\, K_1$, die indessen nicht genügen, um die Realität von $C'_4$ festzustellen, da jede imaginäre Curve $4^{ter}$ Ordnung 16 reelle Puncte enthält. — Man hat dazu vielmehr auf die Gleichung

$$C_4 \,.\, C'_4 = t_1 \ldots t_8 + \lambda\, K^3\, K_1$$

zurückzugehen, die in Folge der Realität von $C_4$, $t_1 \ldots t_8$, $K^3 K_1$ die Realität von $\lambda$ und damit die von $C'_4$ unmittelbar lehrt. —

## § 7.

## Die Rückkehrtangenten der Curven vierter Classe.

Aus allen bisher vermittelten Sätzen über Wendepuncte der Curven $4^{ter}$ Ordnung lassen sich durch Anwendung des Princips der Dualität genau entsprechende ableiten, welche die Rückkehrtangenten der Curven vierter Classe betreffen. So ergiebt sich vor Allem der Satz:

**15)** »*Jeder fünf Rückkehrtangenten einer Curve vierter Classe berührende Kegelschnitt (K) berührt auch drei weitere Rückkehrtangenten derselben. — Die aus den zugehörigen Rückkehrpuncten an*

*die Curve vierter Classe noch ferner möglichen (8) Tangenten umhüllen gleichfalls einen Kegelschnitt ($K_1$). Zugleich ist der Curve vierter Classe ($C_4$) selbst eine andere Curve von derselben Classe ($C'_4$) zugeordnet, welche die genannten acht Rückkehrpuncte von $C_4$ gleichfalls zu Rückkehrpuncten hat. Die den letzteren zugehörigen Rückkehrtangenten von $C'_4$ berühren den Kegelschnitt K, die aus ihnen an $C'_4$ gehenden weiteren Tangenten den Kegelschnitt $K_1$.«*

Für die analytische Darstellung der Curven vierter Classe liefert dieser Satz die Form

**16)** $$C_4 . C'_4 \equiv u_1 . u_2 \ldots u_8 + \lambda K^3 K_1,$$

wenn $u_i = 0$ die Gleichungen der Rückkehrpuncte sind.

Es folgt weiter, dass die 24 Rückkehrtangenten und die ihnen zugehörigen Kegelschnitte ein System von ganz derselben Art bilden, wie das oben für die Wendepuncte und Wendekegelschnitte der Curven vierter Ordnung entwickelte; ferner, dass höchstens acht Rückkehrtangenten reell sein können etc.

## § 8.

Ich kehre jetzt zurück zu den beiden Darstellungsformen der Curven vierter Ordnung (siehe No. 2 u. 7) in Verbindung mit jedesmal einer anderen Curve derselben Ordnung. Die erstere von ihnen

(A.) $$C_4 . C'_4 \equiv t_1 \ldots t_8 + \lambda K^2 . C''_4$$

bezog sich auf einen beliebigen Kegelschnitt K und die in den Schnittpuncten desselben mit $C_4$ gezogenen Tangenten; die andere

(B.) $$C_4 . C'_4 \equiv t_1 \ldots t_8 + \lambda K^3 . K_1$$

dagegen auf einen Wendekegelschnitt und die diesem zugehörigen Wendetangenten. Sie waren den beiden Darstellungsformen der Curven dritter Ordnung

(a) $$C_3 \equiv t_1 t_2 t_3 + \lambda P^2 . Q \quad \text{und}$$

(b) $$C_3 \equiv t_1 t_2 t_3 + \lambda P^3$$

respective analog. Aus ihnen kann man nun eine Eigenschaft für die Puncte von P resp. von K ableiten. —

Ich beginne mit der dritten Ordnung und bilde die Gleichung der Polargeraden $\Delta'$ eines beliebigen Punctes $x'$ von P in Bezug auf $C_3$. Sie lautet in den beiden Fällen (a) und (b)

$$\Delta' \equiv t'_1 t'_2 t'_3 \left\{ \frac{t_1}{t'_1} + \frac{t_2}{t'_2} + \frac{t_3}{t'_3} \right\} = 0 \quad [14])$$

[14]) Unter $t'_1$ ist das Resultat der Substiution der Coordinaten $x'$ in $t_1$ verstanden.

ist also identisch mit der in Bezug auf das Dreiseit $t_1 t_2 t_3$ gebildeten [15]) Aus der Gleichung (b) erhält man weiter als Gleichung des Polarkegelschnittes für denselben Punct

$$\Delta = t'_1 t_2 t_3 + t'_2 t_3 t_1 + t'_3 t_1 t_2 = 0 \text{ d. h.}$$

**17a.** »*Die gerade und die conische Polare eines jeden Punctes der Wendelinie (P) in Bezug auf die Curve 3ter Ordnung sind identisch mit den entsprechenden Polaren in Bezug auf das von den Wendetangenten gebildete Dreiseit.*«

Hier geht die conische Polare ferner durch die Ecken des Dreiseits und den Pol der Linie P in Bezug auf dasselbe, der linear construirbar ist. Es folgt daraus zugleich, dass die harmonischen Polaren der Wendepuncte, die in Verbindung mit den bezüglichen Wendetangenten ja die Polarkegelschnitte derselben bilden, alle drei durch diesen Pol und jede durch eine bestimmte Ecke des Dreiseits hindurchgehen.

Aehnlich verhält es sich nun bei den Curven vierter Ordnung. Die Verschiedenheit besteht wesentlich in dem Auftreten der zugeordneten Curve. Die Gleichung (A) liefert den Satz von der Identität der Polargeraden jedes Punctes von K in Bezug auf $t_1 . t_2 \ldots t_8$ mit derjenigen in Bezug auf $C_4 . C'_4$ (überhaupt in Bezug auf jede Curve des durch Aenderung von $\lambda$ entstehenden Büschels 8ter Ordnung). Ebenso
**17b.** folgt aus der Darstellung (B) der Satz, »*dass für jeden Punct des Wendekegelschnittes (K) Polargerade sowie Polarkegelschnitt dieselben sind in Bezug auf $C_4 C'_4$ wie in Bezug auf das von den acht Wendetangenten gebildete Achtseit.*«

Die Gerade, welche der zerfallende Polarkegelschnitt eines Wendepunctes von $C_4$ oder $C'_4$ in Bezug auf $C_4 . C'_4$ ausser der betreffenden Wendetangente enthält, — ich werde sie kurz Harmonikale [16]) nennen — wird gefunden als die gerade Polare des betreffenden Wendepunctes in Bezug auf das von den übrigen Wendetangenten gebildete Siebenseit; wie man unmittelbar einsieht durch Aufstellung der Gleichung des Polarkegelschnitts. Diese lautet z. B. für den Wendepunct $x'$ der Geraden $t_1 = 0$,

$$t_1 \left\{ \frac{t_2}{t'_2} + \frac{t_3}{t'_3} + \ldots + \frac{t_8}{t'_8} \right\} = 0;$$

---

15) oder, da sie von $\lambda$ unabhängig ist, identisch mit der Polargeraden in Bezug auf jede Curve des durch Aenderung von $\lambda$ entstehenden Büschels von C. 3. O.

16) Diese Bezeichnung, welche ich einem Vorschlage meines Vaters verdanke, und die der bei den Curven dritter Ordnung gebräuchlichen „harmonische Polare“ wohl vorzuziehen ist, hat ihre Berechtigung darin, dass die Harmonikale stets der Ort der harmonischen Mittelpuncte ersten Grades ist in Bezug auf die Schnittpuncte der durch den Wendepunct gehenden Transversalen mit der Curve für den Wendepunct als Pol.

ihr erster Factor liefert die Wendetangente, der zweite die Harmonikale. — Diese Harmonikale, (die von der zu den einzelnen Curven $C_4$ oder $C'_4$ gehörigen natürlich verschieden ist) lässt sich nun aus den Wendetangenten und dem gegebenen Wendepunct linear construiren. —

Bildet man nämlich die Gleichung der Polargeraden eines Punctes $x'$ in Bezug auf ein System von m Geraden $(t_1 .. t_m)$ und dann in Bezug auf das durch Weglassung einer dieser Geraden (etwa $t_m$) entstehende System von $m-1$ Geraden, (ich nenne dieselben resp. $\Delta_m$ und $\Delta_{m-1}$), so erhält man

$$\Delta_m = \frac{t_1}{t'_1} + \frac{t_2}{t'_2} + \ldots + \frac{t_m}{t'_m} = 0 \quad \text{und}$$

$$\Delta_{m-1} = \frac{t_1}{t'_1} + \frac{t_2}{t'_2} + \ldots + \frac{t_{m-1}}{t'_{m-1}} = 0,$$

und es zeigt sich, dass die erstere Gleichung durch die aus dem Zusammenbestehen der Gleichungen $\Delta_{m-1} = 0$ und $t_m = 0$ sich ergebenden Coordinatenwerthe befriedigt wird, dass also der Durchschnittspunct von $t_m$ mit $\Delta_{m-1}$ auf $\Delta_m$ liegt. [17]) Man braucht daher, um $\Delta_m$ zu finden, nur die Polargeraden für zwei verschiedene solche $(m-1)$ seite zu bilden, so ist die Verbindungslinie ihrer Schnittpuncte mit den resp. beiden Linien t die verlangte Polargerade $\Delta_m$. — Die Polargeraden $\Delta_{m-1}$ kann man durch dieselbe Methode aus Polargeraden eines Systems von nur $m-2$ Geraden ableiten, und fährt mit dieser Reduction so lange fort, bis nur noch zwei Gerade übrig bleiben. Die Polargerade in Bezug auf diese kann man aber nach den bekannten Sätzen vom vollständigen Vierseit linear construiren.

---

Bei den Curven dritter Ordnung, wo die drei Wendepuncte in gerader Linie liegen, schneiden sich die Harmonikalen (harmon. Polaren) in einem Punct. Hier, wo die acht Wendepuncte der gegebenen und die entsprechenden der zugeordneten Curve auf einem Kegelschnitt liegen, wäre demgemäss zu erwarten, dass die Harmonikalen der betreffenden Wendepuncte in Bezug auf jede einzelne Curve 4ter Ordnung ($C_4$ oder $C'_4$), oder wenigstens in Bezug auf den Complex beider ($C_4 . C'_4$) einen Kegelschnitt umhüllten.

Diese Lücke in der von mir gegebenen Wendepuncttheorie der Curven vierter Ordnung im Gegensatze zu derjenigen der Curven dritter Ordnung tritt in ein noch helleres Licht, wenn man sich der Beziehungen erinnert, in denen dort eine gewisse Reihe [18]) von Curven dritter Classe zu den Harmonikalen steht. —

17) Vergl. Cremona, Einleitung in die eb. Curven No. 76.

18) Unter „Reihe" verstehe ich den dem Ausdruck „Büschel" dualistisch entsprechenden Ausdruck.

Ebenso nämlich wie die Wendepuncte der gegebenen Curve dritter Ordnung die Fundamentalpuncte eines Büschels von Curven 3ter Ordnung bilden, und zwar so, dass jede dieser Curven dieselben zu Wendepuncten hat, so ergeben sich die neun Harmonikalen als die gemeinschaftlichen Rückkehrtangenten einer Reihe von Curven dritter Classe. Ist bei den ersteren die Lage der Wendepuncte constant und die Richtung der Wendetangenten variabel, so ist bei den letzteren die Richtung der Rückkehrtangenten constant und die Lage der Rückkehrpuncte veränderlich. Ebenso ferner, wie für die Wendepuncte der Satz gilt, dass auf der Verbindungslinie zweier Wendepuncte ein dritter liegt, so folgt für die Harmonikalen als Rückkehrtangenten einer Curve dritter Classe der reciproke Satz, dass durch den Schnittpunct je zweier von ihnen stets eine dritte geht. Es zeigt sich also hier zwischen Wendepunct und Harmonikale ein vollständiges dualistisches Entsprechen.

Ist es nun gestattet, ein solches Entsprechen auch bei den Curven 4ter Ordnung anzunehmen, so kann man daraus, dass die Wendepuncte Schnittpuncte der gegebenen Curve mit einer Curve 6ter Ordnung sind, für die Harmonikalen einfach schliessen, dass sie die gemeinschaftlichen Tangenten einer Curve 4ter und einer solchen 6ter Classe, und Rückkehrtangenten der ersteren sind. Dieses letztere würde nach 15) dann unmittelbar zur Folge haben, dass ein fünf Harmonikalen berührender Kegelschnitt stets drei weitere Harmonikalen zu Tangenten enthielte, und würde damit die vollständige Harmonie hergestellt sein.

Ist übrigens die eben erwähnte Curve vierter Classe bekannt, so ist auch eine Curve 6ter Classe gegeben, welche ihre Rückkehrtangenten berührt: nämlich die Einhüllende derjenigen Geraden, deren Polarkegelschnitte in Bezug auf die Curve vierter Classe in zwei Puncte zerfallen oder, was dasselbe ist, die Einhüllende der Doppeltangenten ihrer ersten (einhüllenden) Polaren. Analytisch stellt sich diese Curve (wie die Hessiana bei den Ordnungscurven) als Determinante der zweiten partiellen Differentialquotienten der Curve 4ter Classe dar. —

Indessen ist es mir nicht gelungen, eine Curve 4ter Classe von der verlangten Art anzugeben. [19])

---

[19]) Für die von mir in dieser Beziehung untersuchten Curven erhielt ich stets, und zwar meistens bedeutend zu hohe Grade. So liefert z. B. die sogenannte Cayley'sche Curve, die in der oben erwähnten Reihe von Curven dritter Classe eine hervorragende, der der Hesse'schen Curve analoge Stellung einnimmt, und als Enveloppe entweder der zerfallenden Polarkegelschnitte oder der Verbindungslinien des Doppelpunctes der letzteren mit dem zugehörigen Pol definirt werden kann, für die Curven 4ter Ordnung bei der ersteren Definition eine Curve 12ter bei der zweiten eine solche 18ter Classe.

§ 9.

Ueber

## die Wendetangenten der Curven vierter Ordnung

ist noch folgendes hinzuzufügen. [20])

**18)** Wie die Wendepuncte als Schnittpuncte der Curve 4ter Ordnung mit einer Curve 6ter Ordnung gefunden werden, so ergeben sich die Wendetangenten als gemeinschaftliche Tangenten einer Curve 4ter Classe $(P=0)$ und einer Curve 6ter Classe $(Q=0)$. Die erstere derselben $(P=0)$ ist die Enveloppe der Linien, welche die Curve vierter Ordnung in 4 Puncten mit äquianharmonischem Doppelverhältniss schneiden. Ist also die Curve 4ter Ordnung symbolisch durch $a_x^4 \equiv b_x^4 \ldots$ gegeben, so kann die Gleichung von P aus der symbolischen Darstellung der betreffenden Invariante der biquadratischen binären Formen $i=(ab)^4$ [21]) durch einfache Zufügung des Symboles u der Liniencoordinaten abgeleitet werden, so dass $P=(uab)^4$ ist. — Ebenso erhält man für Q als Enveloppe der die Curven 4ter Ordnung in vier harmonischen Puncten schneidenden Geraden [22]) aus der cubischen Invariante der biquadratischen (binären) Formen $j=(ab)^2(bc)^2(ca)^2$, die Darstellung

$$Q=(uab)^2(ubc)^2(uca)^2$$

Mit Hülfe der beiden Invarianten i und j bildet man die Discriminante der biquadratischen binären Formen

$$r=\frac{1}{27}\left\{ i^3-6j^2 \right\}$$

Aus ihr folgt durch Zufügung des Symboles u die Gleichung der Enveloppe der geraden Linien, welche die Curve 4ter Ordnung in zwei zusammenfallenden Puncten schneiden, oder mit anderen Worten die Gleichung der Curve vierter Ordnung in Liniencoordinaten

**19)** $$27R \equiv P^3-6Q^2=0$$

R ist von der zwölften Classe, hat also mit P 48, mit Q 72 gemeinschaftliche Tangenten. Unter diese gehören nach dem Obigen (18) auch die 24 gemeinschaftlichen Tangenten von P und Q, die als Wendetangenten von $C_4$ (oder R) aber doppelt zu zählen sind. — Dies zeigt auch direct die Gleichung 19), indem für $R=0$ und $P=0$, Q quadratisch heraustritt. Für $R=0$ und $Q=0$ tritt P sogar cubisch heraus, woraus folgt, dass Q von den Wendetangenten in denselben Puncten wie R, d. h. in den Wendepuncten berührt wird.

---

[20]) S. Clebsch, Crelle's Journal, Bd. 59, S. 43 u. ff.

[21]) S. Clebsch, Theorie der binären Formen §§ 40 u. 41.

[22]) Eine andere geometr. Definition dieser Curven findet sich bei Clebsch im 59. Bd. von Crelle's Journal S. 135.

Die eben angeführten Sätze sind von Clebsch in seiner schönen Abhandlung „Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen“ im 59. Bande des Crelle'schen Journals S. 43 u. ff. entwickelt. — Ich benutze diese Gelegenheit um ein Versehen zu corrigiren, welches sich an der citirten Stelle und in ähnlicher Weise auch anderweitig befindet und leicht zu falschen Anschauungen Veranlassung giebt.

Clebsch bemerkt nämlich, nachdem er das Theorem 19) abgeleitet, Folgendes:

„Es ist durch geometrische Betrachtungen bewiesen, dass im Allgemeinen jede Wendetangente einer algebraischen Curve in ihrer Darstellung durch Liniencoordinaten, bei welcher zu der gegebenen Curve nothwendig noch andere Zweige hinzutreten, als Rückkehrtangente auftritt“, und sucht dies an der Gleichung 19) direct nachzuweisen. Indem er den Ausdruck $P^3 - 6Q^2$ für Tangenten, welche den Wendetangenten (u) sehr nahe kommen, bildet, erhält er unter Beibehaltung der Grössen niedrigster Ordnung $(dQ)^2 = 0$, und schliesst daraus, dass jede Wendetangente in dem Puncte, dessen Gleichung

$$U_1 . \frac{dQ}{du_1} + U_2 . \frac{dQ}{du_2} + U_3 . \frac{dQ}{du_3} = 0$$

ist, zwei verschiedene Zweige der Curve $R = 0$ berühre, dieser Berührungspunct (d. h. der ursprüngliche Wendepunct) also Rückkehrpunct derselben werde. —

Es sind nun zwar zunächst, wie bekannt, Wendetangenten und Rückkehrpuncte dualistisch entsprechende Elemente, und verwandelt sich auch in der That z. B. bei der Bildung der Reciprocalcurve jede Wendetangente in einen Rückkehrpunct. — Nicht aber ist bei der Darstellung einer Ordnungscurve in Liniencoordinaten dasselbe der Fall. — Die Verwandlung der Wendetangenten in Rückkehrtangenten soll nach Clebsch hier dadurch ermöglicht werden, dass zu der gegebenen Curve 4ter Ordnung neue Zweige hinzutreten, die dann, da die ursprüngliche Curve 4ter Ordnung selbst (im Allgemeinen) keine Rückkehrtangenten enthalten kann, diese enthalten müssen.

Es ist nun aber leicht zu zeigen, dass auch dies nicht möglich ist. Eine Curve 12ter Classe hat allerdings im Allgemeinen 360 Rückkehrtangenten. Die Zahl derselben wird aber durch jede Doppeltangente um 6, durch jede Wendetangente um 8 reducirt, also im Ganzen um $6 . 28 + 8 . 24 = 360$, so dass keine Rückkehrtangente übrig bleibt.

Weiter lässt sich nachweisen, dass bei der Darstellung einer Curve 4ter Ordnung (ohne Doppel- und Rückkehrpuncte) in Liniencoordinaten überhaupt keine neuen Zweige hinzutreten. Denn ein solcher Zweig müsste doch irgendeine Singularität besitzen. Eine Rückkehrtangente kann er nach dem

eben Gesagten nicht haben, ebensowenig aber einen Doppelpunct, da die Zahl derselben (im Allgemeinen 8100) durch die 24 Wendetangenten und die 28 Doppeltangenten gleichfalls auf 0 reducirt wird. — Noch weniger aber kann R durch das Hinzutreten eines Zweiges eine neue Wende- oder Doppeltangente erhalten, da durch eine solche die Zahlen für die Doppel- und Rückkehrpuncte der Curve R noch mehr reducirt, also negativ werden würden. — Auch würde dann bei einer rückwärtigen Verwandlung der Gleichung $R=0$ in Punctcoordinaten die erhaltene Curve von einem niederen Grade als 4 werden; was natürlich sinnlos wäre.

Anders ist es, wenn die gegebene Ordnungscurve Doppel- oder Rückkehrpuncte enthält. Diese treten in der That bei der Darstellung der Curven in Liniencoordinaten als Factoren heraus, und zwar die ersteren zweifach, die letzteren dreifach. — Ebenso sondern sich bei der Darstellung von Classencurven in Punctcoordinaten etwa vorhandene Doppel- und Wendetangenten als Factoren aus. — Dies sind aber die einzigen Fälle, wo Zweige — falls man sich des Ausdruckes hier noch bedienen will — zu der gegebenen Curve hinzutreten. Dasselbe gilt natürlich allgemein für Curven von beliebig hoher Orduung. —

Was nun den von Clebsch speciell für Curven vierter Ordnung aus der Form der Gleichung $P^3-6Q^2=0$ geführten Beweis anbelangt, so ist es unrichtig, daraus, dass sich für den Wendetangenten sehr nahe liegende Tangenten die Gleichung 19) in $(dQ)^2=0$ verwandelt, zu schliessen, dass die Tangenten hier zwei verschiedene Zweige der Curve berühren.

Man erkennt dies leicht folgendermassen: Bildet man die Gleichung der letzten Polarenveloppe der Wendetangente (u) oder die Gleichung ihres Berührungspunctes, so zeigt sich, dass dieselbe identisch verschwindet, da für sie $P=0$ und $Q=0$ sind. Hieraus weiss man, dass die Linie u entweder Doppel- oder Wendetangente von R ist, je nachdem nämlich die beiden Factoren, in welche die Gleichung ihrer vorletzten Polarenveloppe zerfällt, und welche die beiden Berührungspuncte von (u) liefern, verschieden oder gleich sind. — Man erhält aber für dieselbe die Gleichung

$$\left(U_1.\frac{dQ}{du_1}+U_2.\frac{dQ}{du_2}+U_3.\frac{dQ}{du_3}\right)^2=0,$$

und hat also in U in der That einen Wendepunct vor sich. Seine Gleichung ist mit der des Berührungspunctes von u an $Q=0$ identisch, wodurch das auf S. 28 anderweitig Bewiesene bestätigt wird. —

§ 10.

Ich wende mich jetzt zur kurzen Betrachtung

## einiger die Wendepuncte und Wendekegelschnitte betreffenden Specialitäten.

**I.** Schon in der Einleitung (S. 1) habe ich einer Classe von Curven $4^{ter}$ Ordnung Erwähnung gethan, welche auf der Verbindungslinie (P) zweier Wendepuncte stets einen dritten, und daher, wie leicht zu zeigen, auch einen vierten enthalten. —

Die den drei auf P gelegenen Wendepuncten zugehörigen Wendetangenten ($t_1$, $t_2$, $t_3$) bilden nämlich dann zusammen mit der in dem vierten Schnittpunct von P mit der Curve $4^{ter}$ Ordnung gezogenen Tangente ($t_4$) eine Curve $4^{ter}$ Ordnung; ebenso die dreifach gerechnete Linie P in Verbindung mit der durch die ferneren Schnittpuncte zweier Wendetangenten ($t_1$ $t_2$) mit der Curve $4^{ter}$ Ordnung gelegten Geraden Q.

Diese beiden Curven $4^{ter}$ Ordnung haben mit der gegebenen 13, also auch 3 weitere Puncte gemein, d. h. auch der vierte Schnittpunct von P mit der Curve $4^{ter}$ Ordnung ist ein Wendepunct, und die ferneren Schnittpuncte der Wendetangenten liegen auf einer Geraden Q. — Die Gleichung der Curve vierter Ordnung lässt sich also hier darstellen in der Form

**21.** $$C_4 \equiv t_1\, t_2\, t_3\, t_4 + \lambda P^3 Q = 0,$$

eine Gleichung, die mit der oftgenannten Darstellung der Curven dritter Ordnung die äusserste Analogie besitzt, und deren weitere Verfolgung daher wohl nicht ohne Interesse sein dürfte.

Dieselbe enthält eine unabhängige Constante weniger als die allgemeine Gleichung einer Curve $4^{ter}$ Ordnung, erfordert also zu ihrem Bestehen das Verschwinden einer Invariante derselben. — Einen Factor dieser Invariante kann man übrigens für den Fall eines speciellen Coordinatendreiecks leicht angeben. Wählt man nämlich zwei Wendepuncte zu Ecken, die zugehörigen Wendetangenten zu Seiten ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) des Fundamentaldreiecks, so erhält die Gleichung der Curve, da die Coefficienten von $x_1^4$, $x_2^4$, $x_1^3\, x_3$, $x_2^3\, x_3$, $x_1^2\, x_3^2$, $x_2^2\, x_3^2$ aus ihr herausfallen müssen die Form

**22)** $$C_4 \equiv x_1\, x_2\, \varphi_2 + x_3^3\, \varphi_1 = 0,$$

wo $\varphi_1$ und $\varphi_2$ Functionen $1^{ten}$ resp. $2^{ten}$ Grades in den Veränderlichen bedeuten. $\varphi_2 = 0$ berührt $C_4$ dreipunctig in seinen Schnittpuncten mit $x_3 = 0$, und zerfällt nur dann in zwei gerade Linien, wenn seine Discriminante verschwindet. Diese Discriminante muss also ein Factor der obengenannten Invariante sein, deren Grad (wie wohl überhaupt der aller Invarianten, deren Verschwinden ähnliche einfache geometrische

Eigenschaften ausdrückt) sehr hoch zu sein scheint. (Vergl. das am Schluss des § 11 Gesagte).

Man ersieht hieraus ferner, dass ein Wendekegelschnitt im Allgemeinen nie in zwei gerade Linien zerfallen kann. —

Die Gleichung 22) lehrt übrigens ferner, wie das Verschwinden einer Invariante auch nöthig ist, wenn sich zwei Wendetangenten in einem Puncte der Curve, oder drei Wendetangenten in einem beliebigen Puncte schneiden etc.

**II.** Der in den §§ 3 und 4 geführte Beweis des Wendepunctsatzes ist ohne Weiteres in allen Fällen anwendbar, wo keines der drei Curvensysteme in einem der benutzten Puncte einen Doppelpunct oder Schnittpunct zweier Theilcurven hat; er bedarf einer Correction, sobald etwa zwei der acht Tangenten sich in einem Puncte des Kegelschnittes schneiden oder eine durch den Berührungspunct der andern geht, oder wenn gar zwei derselben zusammenfallen. Alle diese aufgeführten Fälle können bei einer allgemeinen Curve vierter Ordnung nicht vorkommen. Ich werde hier nur den letzterwähnten einer Doppeltangente betrachten, da er in dem von mir gewählten Beispiel der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpuncten auftritt. Für diese reducirt sich nämlich die Zahl der Wendepuncte durch die drei Doppelpuncte auf sechs, und liegt daher die Frage nahe, was denn wohl aus den beiden ferneren Schnittpuncten des jene sechs Wendepuncte enthaltenden Kegelschnittes mit der Curve $4^{ter}$ Ordnung geworden sei.

Werden diese beiden Puncte nun Berührungspuncte einer Doppeltangente, so giebt die im § 2 gegebene Darstellung (4) der Curven vierter Ordnung

$$C_4 . C'_4 \equiv t_1 \ldots t_5 . C_3 + \lambda K^3 . K_1$$

unmittelbar die Mittel an die Hand, die dann auftretenden weiteren Specialitäten zu erkennen. — Dieselbe lehrt zunächst, dass $C_3$ in seinen Schnittpuncten mit K, $C_4 . C'_4$ dreipunctig schneidet. Fallen also von den an $C_4$ in seinen Schnittpuncten mit K gezogenen Tangenten zwei in eine Doppeltangente $\tau$ zusammen, so muss $C_3$, welches dieselbe in ihren Berührungspuncten mit $C_4$ gleichfalls berührt, also vier Puncte mit ihr gemein hat, dieselbe als Factor enthalten und zwar entsprechend jedem Berührungspuncte einmal. — Für $C_3$ bleibt dann nur noch eine gerade Linie $t_6$ übrig, so dass die obige Gleichung sich in die folgende verwandelt:

$$23)\qquad C_4 . C'_4 \equiv t_1 .. t_6 . \tau^2 + \lambda K^3 . K_1$$

Dieselbe lehrt. dass auch $t_6$ Wendetangente ist, und zwar ebenso wie die übrigen zugleich an $C_4$ und $C'_4$. Ferner ist klar, dass $\tau$ auch Doppeltangente an $C'_4$ mit denselben Berührungspuncten wie an $C_4$ wird, und

dass $K_1$ den Kegelschnitt K in seinen Schnittpuncten mit der Doppeltangente berührt.

Anm.: Dass der sechste Wendepunct hier auf dem durch die übrigen bestimmten Kegelschnitt liegt, lässt sich auch direct zeigen, wenn man, ähnlich wie in § 3, die Curve 4ter Ordnung ($C_4$) durch eine Curve 6ter Ordnung ($C_6$) ergänzt, und dann die Schnittpuncte von

$$C_6 . C_4 \, , \; K^3 K_1 \text{ und } t_1 \ldots t_6$$

betrachtet. — Man gelangt dadurch zu der folgenden Darstellung der Curven 4ter Ordnung:

$$C_4 . C'_4 \equiv t_1 \ldots t_6 . \mathfrak{K} + \lambda K^3 K_1,$$

wo $\mathfrak{K}$ einen Kegelschnitt bedeutet, der $C_4 . C'_4$ in seinen Schnittpuncten mit K dreipunctig schneidet. — In dem eben betrachteten Fall zerfällt $\mathfrak{K}$ in die zweifach zurechnende Doppeltangente. —

---

Ich wende mich jetzt zu dem Beispiel der Curven 4ter Ordnung mit drei Doppelpuncten, die, wie nur wenige Curven 4ter Ordnung, eine analytische Entwickelung des Wendekegelschnittes, des ergänzenden Kegelschnittes und der zugeordneten Curve gestatten.

§ 11.

## Die Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpuncten.[23]

Wählt man die drei Doppelpuncte einer einläufigen Curve 4ter Ordnung zu Ecken des Fundamentaldreiecks, so lautet ihre Gleichung

a) $$a_{11} x_2^2 x_3^2 + a_{22} x_3^2 x_1^2 + a_{33} x_1^2 x_2^2 + 2a_{23} x_1^2 x_2 x_3 + 2a_{31} x_2^2 x_3 x_1 + 2a_{12} x_3^2 x_1 x_2 = 0, \quad \text{oder}$$

$$a_{11}\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + a_{22}\left(\frac{1}{x_2}\right)^2 + a_{33}\left(\frac{1}{x_3}\right)^2 + 2a_{23}\left(\frac{1}{x_2 x_3}\right) + 2a_{31}\left(\frac{1}{x_3 x_1}\right) + 2a_{12}\left(\frac{1}{x_1 x_2}\right) = 0,$$

eine Gleichung, die zeigt, dass aus der Gleichung einer Curve 4ter Ordnung mit drei Doppelpuncten die eines Kegelschnittes durch die Substitutionen

b) $$\frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3} \text{ oder } x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2 = y_1 : y_2 : y_3,$$

und umgekehrt aus der Gleichung des letzteren die der ersteren durch die Substitutionen

c) $$\frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} \text{ oder } y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2 = x_1 : x_2 : x_3$$

abgeleitet werden kann. — Zugleich entspricht, wie überhaupt bei Curven vom Geschlecht 0, jedem Puncte der einen Curve ein und nur ein

---

[23]) Vergl. Salmon, höhere eb. Curven S. 315 u. ff.

Punct der andern. Den Puncten einer Seite ($y_i = 0$) des Fundamentaldreiecks der einen Figur entsprechen bestimmte Richtungen in der zugehörigen Ecke ($x_k = 0$, $x_l = 0$) der andern Figur. So entsprechen z. B. den Schnittpuncten des Kegelschnittes mit den Seiten des Coordinatendreiecks die Richtungen der Tangenten in den Doppelpuncten der Curve 4ter Ordnung. — Je nachdem die ersteren reell oder imaginär sind oder zusammenfallen, ist auch der Doppelpunct ein Knotenpunct (Schnittpunct von zwei reellen Aesten), ein isolirter oder ein Rückkehrpunct. — Allgemein entspricht jeder Curve, welche durch die drei Fundamentalpuncte ihrer Ebene resp. $f_1$, $f_2$, $f_3$ mal hindurchgeht, eine Curve von der Ordnung

d) $$n' = 2n - f_1 - f_2 - f_3,$$

die durch die drei entsprechenden Fundamentalpuncte der anderen Ebene resp. $f'_1$, $f'_2$, $f'_3$ mal hindurchgeht, für

$$f'_1 = n - f_2 - f_3; \ f'_2 = n - f_3 - f_1; \ f'_3 = n - f_1 - f_2.$$ [24])

Um Rechnungen und weitläufige Discussionen zu vermeiden, werde ich mich im Folgenden auf die in eben gezeigter Weise aus einem Kreise transformirten Curven 4ter Ordnung beschränken, welche ausserdem den Vortheil gewähren, dass die Gleichung 6ten Grades, welche ihre Wendepuncte liefert, algebraisch lösbar ist. — Die betreffenden Entwickelungen für den allgemeineren Fall können in derselben Weise geschehen; ich werde sie am Schlusse kurz andeuten. —

Als Fundamentaldreieck in der Y Ebene wähle ich ein gleichseitiges Dreieck und setze die Coordinaten $y_i$ eines Punctes fest als proportional seinen senkrechten Abständen von den Seiten. Dadurch werden die Coordinaten des Dreiecksmittelpunctes einander gleich, und die Gleichung der unendlich fernen Geraden lautet $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. Zur Bestimmung ihrer absoluten Werthe setze ich die Coordinaten eines Punctes seinen Entfernungen von den Seiten gleich und wähle die Höhe des Dreiecks zur Längeneinheit. Dann werden die Coordinaten des Mittelpunctes $= 1/3$, und die Coordinaten eines jeden Pnnctes genügen der identischen Relation

e) $$y_1 + y_2 + y_3 = 1.$$

Für das entsprechende Dreieck in der X Ebene treffe ich dieselben Fortsetzungen. Dann entsprechen sich die Mittelpuncte beider Dreiecke wechselseitig, und der unendlich entfernten Geraden in der einen Figur entspricht der Kreis durch die Ecken des Dreiecks in der andern.

In Bezug auf ein solches Coordinatendreieck lautet nun die Gleichung eines Kreises, der den Mittelpunct desselben zum Centrum hat,

[24]) Vergl. Salmon, höhere eb. Curven S. 362.

und dessen Gleichung sich daher durch Vertauschung zweier Coordinaten nicht ändern darf,

f) $$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2\lambda(y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2) = 0.$$

Der Radius (r) dieses Kreises wird erhalten, indem man seine Schnittpuncte mit der Halbirungslinie (etwa $y_1 - y_2 = 0$) eines Winkels betrachtet. Die Differenz der für die dritte Coordinate ($y_3$) sich dann mit Hülfe der identischen Relation e) ergebenden beiden Werthe liefert den doppelten Radius. Man erhält auf diese Weise:

g) $$r = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2(2\lambda+1)}{\lambda-1}},$$ und umgekehrt

$$\lambda = \frac{9r^2+2}{9r^2-4}.$$

Die den verschiedenen Werthen von $\lambda$ zugehörigen Werthe von r sind mit Hülfe der ersteren Gleichung unmittelbar zu finden.

Für $\lambda > -\frac{1}{2}$ und $< +1$ ist r imaginär. — Für $\lambda = +1$ wird r unendlich gross, und der Kreis verwandelt sich in die doppelt zurechnende unendlich ferne Gerade. Für wachsende Werthe von $\lambda$ nimmt der Radius des Kreises beständig ab, bis er für $\lambda = \pm\infty$ den Werth $\frac{2}{3}$ erhält, und der Kreis selbst durch die Ecken des Dreiecks geht. — Für die nun folgenden negativen Werthe von $\lambda$ zwischen $-\infty$ und $-1$ schneidet der Kreis die Seiten des Dreiecks innerhalb der Ecken, und berührt dieselben für $\lambda = -1$, wo r den Werth $\frac{1}{3}$ annimmt. Endlich werden für die zwischen $\lambda = -1$ und $\lambda = -\frac{1}{2}$ liegenden Werthe die Schnittpuncte des Kreises mit den Seiten imaginär, und für $\lambda = -\frac{1}{2}$ zieht sich derselbe sogar in einen Punct zusammen.

Analog diesen verschiedenen Kreisen entwickeln sich nun die verschiedenen Gestalten der aus den Kreisen durch die Substitutionen (b) transformirten Curven vierter Ordnung, deren Gleichung lautet:

h) $$x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2 + 2\lambda x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = 0.$$

Den Schnittpuncten des Kreises mit einer Seite des Coordinatendreiecks entsprechen in der andern Figur, wie schon bemerkt, die Richtungen der in den Doppelpuncten der Curve vierter Ordnung gezogenen Tangenten, und zwar bilden diese miteinander denselben Winkel wie in der andern Figur die Verbindungslinien der genannten Schnittpuncte mit der gegenüberliegenden Dreiecksecke.

In der That werden die Schnittpuncte des Kreises mit einer Seite, etwa $y_3 = 0$ des Fundamentaldreiecks gefunden durch die Gleichung $y_1^2 + y_2^2 + 2\lambda y_1 y_2 = 0$, aus der sich ergiebt

i) $$\frac{y_1}{y_2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

$\frac{y_1}{y_2}$ stellt aber nach der Definition der Coordinaten das Abstandsverhältniss dieser beiden Puncte (oder überhaupt eines jeden Punctes ihrer Verbindungslinie mit der gegenüberliegenden Ecke) von den Seiten $y_1 = 0$ und $y_2 = 0$ dar. — Diesem entspricht in der andern Figur das Verhältniss $\frac{x_2 x_3}{x_3 x_1} = \frac{x_2}{x_1}$; so dass $\frac{x_1}{x_2}$ das reciproke Abstandsverhältniss darstellt, nämlich $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}} = -\lambda \mp \sqrt{\lambda^2 - 1}$, oder es haben die beiden den obigen Strahlen entsprechenden Tangenten diesen gegenüber nur ihr Abstandsverhältniss von den Seiten vertauscht, bilden also mit einander auch denselben Winkel wie jene.

Hiernach ist es nun leicht, die Gestalten der den verschiedenen Kreisen entsprechenden Curven 4ter Ordnung aufzufinden.

Ist zunächst der Kreis selbst imaginär d. h. ist $\lambda > -\frac{1}{2}$ und $< +1$, so enthält auch die Curve 4ter Ordnung (ausser den 3 isolirten Puncten) keinen reellen Punct.

Wird dann der Kreis reell, ohne die Seiten des Dreiecks zu schneiden, so sind auch die Tangenten in den Doppelpuncten imaginär, und man erhält eine Curve 4ter Ordnung mit drei isolirten Puncten, die ebenso wie der entsprechende Kreis ganz innerhalb des Dreiecks liegt.

Für $\lambda = -\frac{1}{2}$, wo der Radius des Kreises $= 0$ ist, besteht die Curve 4ter Ordnung aus vier isolirten Puncten, indem zu den eben genannten drei Puncten noch der Mittelpunct des Dreiecks hinzutritt. Für die dann folgenden Werthe von $\lambda$ $(\lambda < -\frac{1}{2})$ erweitert sich der Mittelpunct des Dreiecks zu einem Oval, das sich für abnehmende Werthe von $\lambda$ immer mehr nach den Ecken hin zuspitzt und endlich für $\lambda = -1$ Rückkehrpuncte in denselben enthält. Hier sind also die Tangenten in den Doppelpuncten schon reell, fallen aber noch zu zweien in eine Rückkehrtangente zusammen. — Von nun an, d. h. von $\lambda = -1$ bis $\lambda = \pm\infty$ hat der Kreis reelle Schnittpuncte mit den Seiten des Dreiecks und zwar innerhalb der Ecken, folglich die Curve 4ter Ord-

nung reelle Tangenten in den Doppelpuncten und zwar in den Innenwinkeln des Dreiecks.

Für $\lambda = \pm \infty$, wo der Kreis durch die Ecken geht, verwandelt sich die Curve $4^{ter}$ Ordnung in das Product der Dreiecksseiten mit der unendlich fernen Geraden.

Für alle positiven Werthe von $\lambda = + \infty$ bis $\lambda = + 1$ schneidet der Kreis die Seiten in ihren Verlängerungen; die Tangenten der Curve $4^{ter}$ Ordnung in den Doppelpuncten liegen demgemäss in den Aussenwinkeln des Dreiecks. Für $\lambda = + 1$, wo der Kreis in die doppelte unendlich ferne Gerade übergeht, verwandelt sich die Curve $4^{ter}$ Ordnung in den doppelten durch die Ecken des Dreiecks gehenden Kreis, so dass auch hier die Tangenten in den Eckpuncten zusammenfallen. —

Schon im § 6 (S. 23) ist auf den allgemeinen Zusammenhang der Wendepuncte mit einer bestimmten Classe von Doppeltangenten hingewiesen worden, und im letzten § (S. 32) bereits bemerkt, dass in dem hierbetrachteten Fall der Curve $4^{ter}$ Ordnung mit drei Doppelpuncten eine Doppeltangente in Bezug auf den Wendekegelschnitt die Stelle zweier Wendetangenten vertritt. —

Ich werde daher die Gleichungen der Doppeltangenten hier kurz ableiten.[25] Ihre Zahl ist vier, da die 3 Doppelpuncte 24 Doppeltangenten absorbiren.

Eine dieser vier Doppeltangenten ist nun die unendlich ferne Gerade; denn die Gleichung der Curve $4^{ter}$ Ordnung lässt sich in der Form schreiben

$$(x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2)^2 + 2(\lambda - 1) x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = 0,$$

welche zeigt, dass die beiden Berührungspuncte der Linie $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ mit der Curve $4^{ter}$ Ordnung auf dem durch die Ecken des Dreiecks gehenden Kreise liegen, dass dieselben mithin die unendlich fernen imaginären Kreispuncte sind. Man hat hier also den Fall einer reellen Doppeltangente mit imaginären Berührungspuncten.

Die übrigen ergeben sich nun in ähnlicher Weise durch blosse Zeichenvertauschung, da man die Gleichung der Curve $4^{ter}$ Ordnung auch in den folgenden 3 Formen schreiben kann:

i) $$(- x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2)^2 + 2 x_1 x_2 x_3 (x - x_1 + x_2 + x_3) = 0$$
$$(x_2 x_3 - x_3 x_1 + x_1 x_2)^2 + 2 x_1 x_2 x_3 (x + x_1 - x_2 + x_3) = 0$$
$$(x_2 x_3 + x_3 x_1 - x_1 x_2)^2 + 2 x_1 x_2 x_3 (x + x_1 + x_2 - x_3) = 0,$$

wenn man $\lambda (x_1 + x_2 + x_3) = x$ setzt. — Die ins Quadrat erhobenen Ausdrücke stellen Kegelschnitte dar, welche durch die drei Doppelpuncte und die

---

[25]) Vergl. Salmon, höhere eb. Curven S. 320, wo die Gleichungen der Doppeltangenten für den allgemeineren Fall abgeleitet sind.

Berührungspuncte einer Doppeltangente der Curve 4ter Ordnung hindurchgehen. — Man erhält hiernach für das Product $\Pi$ der Doppeltangenten

$$(x - x_1 - x_2 - x_3)(x - x_1 + x_2 + x_3)(x + x_1 - x_2 + x_3)(x + x_1 + x_2 - x_3)$$
$$\equiv (x^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^2 - 4\,C_4,$$

wenn $C_4 = 0$ die Gleichung der Curve 4ter Ordnung ist; oder

$$4\,C_4 \equiv [\lambda^2 (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)]^2 - \Pi,$$

eine Gleichung, die aussagt, dass die acht Berührungspuncte der Doppeltangenten auf dem Kegelschnitte

$$\lambda^2 (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0 \quad \text{oder}$$

k) $$(\lambda^2 - 1)[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] + 2\lambda^2 [x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2] = 0$$

liegen. Dieser ist ein Kreis mit dem Mittelpunct des Dreiecks als Centrum, da seine Gleichung sich durch Vertauschung der Coordinaten nicht ändert, oder, da er wie schon bemerkt durch die unendlich fernen imaginären Kreispuncte hindurchgeht. Seinen Radius $\rho$ erhält man aus g), indem man $\lambda$ durch $\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1}$ ersetzt, und findet dann

l) $$\rho = \frac{1}{3} \sqrt{2(3\lambda^2 - 1)}.$$

$\rho$ ändert bei einer Vertauschung des Zeichens von $\lambda$ seinen Werth nicht; man erhält also in der durch Aenderung von $\lambda$ entstehenden Reihe von Curven 4ter Ordnung zweimal denselben Kreis durch die Berührungspuncte der Doppeltangenten. —

Die Coordinaten dieser Berührungspuncte ergeben sich nun direct aus den Gleichungen j). — So findet man für die Doppeltangente $x - x_1 + x_2 + x_3 = 0$ die folgenden Werthe derselben:

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{-(1 + 3\lambda) \pm \sqrt{5\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2(1 + \lambda)},$$

welche lehren, dass die Berührungspuncte für $\lambda > -\frac{3}{5}$ und $< 1$ imaginär sind, während sie für diese Werthe selbst zusammenfallen, und zwar für den ersteren in einen Undulationspunct, für den letzteren in einen Eckpunct des Dreiecks, da hier die Curve 4ter Ordnung aus dem doppelten Kreise durch die Ecken besteht. — Für die Werthe $\lambda > -\frac{3}{5}$ $< -\frac{1}{2}$ hat also das Oval noch keine reellen Berührungspuncte einer Doppeltangente, folglich auch keinen reellen Wendepunct. —

Die Wendepuncte der Curve 4ter Ordnung $f = 0$, deren Zahl sich in Folge der 3 Doppelpuncte auf 6 reducirt, werden nun ge-

funden als Durchschnitte derselben mit ihrer Hesse'schen Curve $H=0$, deren Gleichung lautet

m) $$H\equiv(\lambda^2-1 [x_1^4(x_2^2+x_3^2)+x_2^4(x_3^2+x_1^2)+x_3^4(x_1^2+x_2^2)$$
$$+2\lambda x_1x_2x_3[x_1^3+x_2^3+x_3^3]$$
$$+2\lambda(2\lambda-1)[x_2^3x_3^3+x_3^3x_1^3+x_1^3x_2^3]$$
$$+2\lambda(1+2\lambda^2)x_1x_2x_3[x_1^2(x_2+x_3)+x_2^2(x_3+x_1)+x_3^2(x_1+x_2)]$$
$$+6(1+\lambda^3)x_1^2x_2^2x_3^2=0$$

Statt direct die Durchschnitte von $f=0$ mit $H=0$ zu betrachten, kann ich aber auch diejenigen von $f=0$ mit

n) $$H+f.\mathfrak{K}=0$$

betrachten, wo $\mathfrak{K}$ einen Kegelschnitt bedeutet, und die Coefficienten von $\mathfrak{K}$ so wählen, dass eine Anzahl Coefficienten aus n) verschwindet. Wegen der Symmetrie der Gleichungen in Bezug auf die drei Coordinaten wähle ich für $\mathfrak{K}$ einen Kreis, d. h. ich setze

o) $$\mathfrak{K}=\alpha(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2\beta(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)$$

dann wird $H+f\mathfrak{K}\equiv$

$$(\lambda^2-1+\alpha)[x_1^4(x_2^2+x_3^2)+x_2^4(x_3^2+x_1^2)+x_3^4(x_1^2+x_2^2)$$
$$+2\lambda x_1x_2x_3(x_1^3+x_2^3+x_3^3)]+2[\beta+\lambda(2\lambda-1)][x_2^3x_3^3+x_3^3x_1^3+x_1^3x_2^3]$$
$$+2[\lambda\alpha+\beta(1+2\lambda)+\lambda(1+2\lambda^2)][x_1x_2x_3(x_1^2(x_2+x_3)$$
$$+x_2^2(x_3+x_1)+x_3^2(x_1+x_2))]+3(\alpha+4\lambda\beta+2+2\lambda^3)x_1^2x_2^2x_3^2=0.$$

Unter diesen vier Reihen von Gliedern kann ich nun durch passende Wahl von $\alpha$ und $\beta$ zwei beliebige zum Verschwinden bringen. Die erste Reihe verschwindet, wenn ich setze

$$\alpha=1-\lambda^2,$$

die zweite, wenn ich setze

$$\beta=\lambda(1-2\lambda).$$

Dann enthält der Rest den Factor $x_1x_2x_3$, den ich fortlasse, weil er nur Doppelpuncte liefert. Es bleibt übrig eine Curve 3ter Ordnung, deren Gleichung nach Wegwerfung des Factors $3(1-\lambda)$ lautet:

p) $$\psi=2\lambda(1+\lambda)[x_1^2(x_2+x_3)+x_2^2(x_3+x_1)+x_3^2(x_1+x_2)]$$
$$+3(1+\lambda+2\lambda^2)x_1x_2x_3=0.$$

Diese Curve 3ter Ordnung geht durch die Ecken des Dreiecks, hat also in jeder derselben noch zwei Schnittpuncte mit f gemein, wie es auch sein muss, da ein Doppelpunct 6 Wendepuncte absorbirt. Die weiteren 6 Schnittpuncte mit f sind die Wendepuncte. — Da übrigens die Curve 3ter Ordnung $\psi=0$ durch eine quadratische Transformation obiger Art (siehe b) und d)) wieder in eine Curve 3ter Ordnung übergeht, f aber in eine Curve 2ter Ordnung, so können die den Wendepuncten ent-

sprechenden Puncte direct als Durchschnitte einer Curve $2^{ter}$ und einer $3^{ter}$ Ordnung gefunden werden. —

Setze ich in der Gleichung $H + f\mathfrak{K} = 0$ aber $\alpha = 1 - \lambda^2$ und $\beta = -\frac{\lambda(2+\lambda^2)}{1+2\lambda}$, so fällt die erste und dritte Reihe fort, und es wird $H + f\mathfrak{K}$ eine Curve $6^{ter}$ Ordnung mit dreifachen Puncten in den Ecken, nämlich, $H + f\mathfrak{K} \equiv$

$$\frac{3(\lambda-1)}{1+2\lambda}[2\lambda(\lambda+1)[x_2^3 x_3^3 + x_3^3 x_1^3 + x_1^3 x_2^3] - 3(1+3\lambda) x_1^2 x_2^2 x_3^2] = 0,$$

eine Curve, die durch quadratische Transformation gleichfalls in eine Curve $3^{ter}$ Ordnung übergeht und dann das neue Coordinatendreieck zum Wendepunctdreieck hat. —

Die Gleichung des Wendekegelschnittes erhält man nun unmittelbar, wenn man die Gleichung der gegebenen Curve $f = 0$ und der eben abgeleiteten $\psi = 0$ in folgender Weise schreibt:

$$f \equiv (x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2)^2 + 2(\lambda - 1) x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

und $\psi = 2\lambda(1+\lambda)[x_1 + x_2 + x_3][x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2] + 3(1-\lambda) x_1 x_2 x_3 = 0$. Bildet man dann den Ausdruck $3f + 2(x_1 + x_2 + x_3)\psi$, der gleich 0 gesetzt eine Curve $4^{ter}$ Ordnung bezeichnet, welche durch die 6 Wendepuncte und die 3 Doppelpuncte von $f = 0$ hindurchgeht, so erhält man

q) $$3f + 2(x_1 + x_2 + x_3)\psi \equiv$$

$$(x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2)[3(x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2) + 4\lambda(1+\lambda)(x_1 + x_1 + x_3)^2] = 0,$$

Der eine Factor $x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 = 0$ liefert den Kreis durch die 3 Ecken, der die gegebene Curve $4^{ter}$ Ordnung ausserdem noch in den unendlich fernen imaginären Kreispuncten schneidet, (s. S. 37) der andere Factor, oder

$$K = 4\lambda(1+\lambda)(x_1 + x_2 + x_3)^2 + 3(x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2),$$

muss, gleich 0 gesetzt, demgemäss die Gleichung des durch die Wendepuncte gehenden Kegelschnittes darstellen. Dieser ist nun wegen der Symmetrie seiner Gleichung in Bezug auf die drei Coordinaten ein Kreis, und geht in Folge dessen auch durch die unendlich fernen imaginären Kreispuncte d. h. durch die Berührungspuncte der Doppeltangente $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ mit der Curve $4^{ter}$ Ordnung. (s. S. 32).

Schreibe ich seine Gleichung in der Form:

r) $$K = 8\lambda(1+\lambda)[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] + 2[8\lambda(1+\lambda) + 3][x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2] = 0,$$

so ergiebt sich aus g) für den Radius R desselben, indem ich statt $\lambda$ setze, $\frac{8\lambda(1+\lambda)+3}{8\lambda(1+\lambda)}$,

s) $$R = \pm \frac{2}{3}(1 + 2\lambda).$$

Für den Werth $\lambda = -\frac{3}{5}$, wo die Curve $4^{ter}$ Ordnung drei Undulationspuncte besitzt, wo also stets zwei Wendepuncte, ebenso wie die Berührungspuncte einer Doppeltangente zusammenfallen, berührt der Wendekreis die Curve $4^{ter}$ Ordnung, und R fällt mit $\rho$ zusammen. $\left(R = \rho = \frac{2}{15}\right)$. —

Die Auffindung der 6 Wendepuncte geschieht nun leicht durch Elimination einer Variablen aus zweien der Gleichungen $f = 0, \psi = 0$ und $K = 0$. Aus der letzten folgt,

$$\dagger \quad x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 = -\frac{4\lambda(1+\lambda)}{3}(x_1 + x_2 + x_3)^2.$$

Setze ich diesen Werth in $f = 0$ oder $\psi = 0$ ein, so folgt

$$\dagger\dagger \quad x_1 x_2 x_3 = \frac{8\lambda^2(1+\lambda)^2}{9(1-\lambda)}(x_1 + x_2 + x_3)^3.$$

Um sogleich die absoluten Coordinatenwerthe zu erhalten, setze ich der Relation e) gemäss

$$x_1 = 1 - (x_2 + x_3),$$

so wird $\dagger$

$$x_2 x_3 + (x_2 + x_3)(1 - (x_2 + x_3)) = -\frac{4\lambda(1+\lambda)}{3}$$

oder $$x_2^2 - x_2(1 - x_3) = \frac{4\lambda(1+\lambda)}{3} + x_3 - x_3^2 \text{ d. h.}$$

$$2x_2 = 1 - x_3 \pm \sqrt{(1-x_3)^2 + 4x_3 - 4x_3^2 + \frac{4\lambda(1+\lambda)}{3}}$$

Setze ich dies mit positiver Wurzel in $\dagger\dagger$ ein oder in

$$\frac{8\lambda^2(1+\lambda)^2}{9(1-\lambda)} = (1 - x_3 - x_2)x_2 x_3, \text{ so erhalte ich}$$

$$\frac{8\lambda^2(1+\lambda)^2}{9(1-\lambda)} = x_3\left[\frac{1-x_3}{2} - \frac{\sqrt{\ }}{2}\right]\left[\frac{1-x_3}{2} + \frac{\sqrt{\ }}{2}\right]$$
$$= x_3\left(x_3^2 - x_3 - \frac{4\lambda(1+\lambda)}{3}\right),$$

also endlich

$$\text{t)} \quad x_3^3 - x_3^2 - \frac{4\lambda(1+\lambda)}{3}x_3 - \frac{8\lambda^2(1+\lambda)^2}{9(1-\lambda)} = 0.$$

Ist $x_3 = \gamma$ eine Wurzel dieser Gleichung, so lauten die beiden andern ($\alpha$ und $\beta$)

$$x_3 = \frac{1-\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1-\gamma)^2 + 4\gamma - 4\gamma^2 + \frac{4\lambda(1+\lambda)}{3}}$$

Dieselben beiden Werthe erhält man auch für die Coordinaten ($x_1$ und

$x_2$) der beiden zu $x_3 = \gamma$ gehörigen Wendepuncte. Daraus ergiebt sich das folgende Schema der sechs Wendepuncte (I—VI)

$$
\begin{array}{ll}
\text{I} & x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta,\ x_3 = \gamma \\
\text{II} & \phantom{x_1 = \alpha,\ } x_2 = \gamma,\ x_3 = \beta \\
\text{III} & x_1 = \beta,\ x_2 = \gamma,\ x_3 = \alpha \\
\text{IV} & \phantom{x_1 = \alpha,\ } x_2 = \alpha,\ x_3 = \gamma \\
\text{V} & x_1 = \gamma,\ x_2 = \alpha,\ x_3 = \beta \\
\text{VI} & \phantom{x_1 = \alpha,\ } x_2 = \beta,\ x_3 = \alpha
\end{array}
$$

Um die Gleichung t) allgemein aufzulösen, hat man nach der Methode des Hrn. Prof. Cayley[26]) ihre Discriminante D und ihre cubische Covariante J zu bilden. Dann ist $(U\sqrt{D} + J)^{1/3} + (U\sqrt{D} - J)^{1/3}$ eine Wurzel der Gleichung. Ich werde die hierzu erforderliche Rechnung indessen hier nicht ausführen, zumal da man zur Auffindung des Productes der Wendetangenten, des ergänzenden Kegelschnittes und der zugeordneten Curve der einzelnen Wurzeln nicht bedarf, sondern nur ihrer symmetrischen Functionen, die bekanntlich durch die Coefficienten der Gleichung (t) direct gegeben sind.

Ich bilde nur, um die Realitätsverhältnisse der Wurzeln der Gleichung einfach discutiren zu können, ihre Discriminante D. — Die Discriminante der allgemeinen cubischen Form

$$a x^3 + 3 b x^2 + 3 c x + d \text{ lautet,}^{27)}$$

$$a^2 d^2 + 4 a c^3 + 4 d b^3 - 3 b^2 c^2 - 6 a b c d, \text{ also hier}$$

$$D = \left[ \frac{4\lambda(1+\lambda)(2\lambda+1)}{27(1-\lambda)} \right]^2 (1+\lambda)(5\lambda+3).$$

Dieselbe verschwindet d. h. die Gleichung t) hat Doppelwurzeln, für die Werthe $\lambda = 0$, wo die Curve 4ter Ordnung indessen noch imaginär ist, für $\lambda = -\frac{1}{2}$, wo sie aus vier isolirten Puncten besteht, für $\lambda = -\frac{3}{5}$, wo sich immer zwei Wendepuncte zu einem Undulationspunct vereinigen und für $\lambda = -1$, wo die Curve drei Rückkehrpuncte hat.

Das Zeichen der Discriminante hängt nur ab von dem Factor

$$\varphi = (1+\lambda)(5\lambda+3),$$

der für $\lambda = -1$ und $\lambda = -\frac{3}{5}$ verschwindet. Für zwischengelegene Werthe von $\lambda$ wird $\varphi$, also auch D negativ, d. h. die cubische Gleichung (t) hat für dieses Intervall drei reelle, und zwar positive Wurzeln; ausserhalb der genannten Grenzen ist $\varphi$, also auch D positiv, und die cubische

---

26) Siehe Salmon, Einführung in die Algebra der lin. Transformationen, Seite 208 u. f.

27) Siehe ebendaselbst, S. 207.

Gleichung hat eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.[28] Sind aber alle Wurzeln der Gleichung reell, so werden auch alle Coordinaten der sechs Wendepuncte reell; ist aber nur eine reell, so werden die Wendepuncte imaginär. Denn ist $\gamma$ der für $x_3$ gefundene reelle Werth, so sind die zugehörigen andern Coordinaten des Wendepunctes, $x_1$ und $x_2$, als mit den andern Wurzeln der cubischen Gleichung identisch, imaginär, also der Punct selbst imaginär.

Um nun die Gleichung der zugeordneten Curve und des Ergänzungskegelschnittes zu bilden, hat man sich zunächst des im § 10 Gesagten zu erinnern. — Wie auf Seite 40 bewiesen, sind in unserem Beispiel die Berührungspuncte der Doppeltangente $x_1+x_2+x_3=0$ mit der Curve 4[ter] Ordnung auf dem Kegelschnitt K durch die 6 Wendepuncte gelegen. Es wird demgemäss (nach § 10) die zugeordnete Curve in diesen Puncten gleichfalls von den genannten Geraden berührt, während der Kegelschnitt $K_1$ den Kegelschnitt K ebendaselbst berührt. —

Da K ein Kreis ist, und die Berührungspuncte der Doppeltangente die unendlich fernen imaginären Kreispuncte sind, so drückt das letztere aus, dass $K_1$ ein zu K concentrischer Kreis ist, seine Gleichung also die Form hat

$$K_1 \equiv \alpha(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2\beta(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)=0. —$$

Um ferner das Product der sechs Wendetangenten zu finden, denke man sich zuerst die Wurzeln $\alpha\,\beta\,\gamma$ der cubischen Gleichung (t) als bekannt. Dann erhält man als Gleichung der dem Wendepuncte I zugehörigen Wendetangente

$$x_1 f'\alpha + x_2 f'\beta + x_3 f'\gamma = 0,$$ [29]

aus der die übrigen entsprechend dem Schema auf Seite 42 durch Vertauschung je zweier der Grössen $\alpha, \beta, \gamma$ oder, was dasselbe ist, der Coordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ hervorgehen. Daher ist das Product der Wendetangenten sowohl in Bezug auf die ersteren, wie in Bezug auf die letzteren symmetrisch. Die Coefficienten des entwickelten Productes sind also symmetrische Functionen der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ d. h. direct durch die Coefficienten der cubischen Gleichung ausdrückbar. —

Man erhält nun weiter aus § 10 No. 23 für die zugeordnete Curve $C_4'$ die Gleichung

u) $$C_4 . C_4' \equiv t_1 \dots t_6 . (x_1+x_2+x_3)^2 - K^3(\alpha(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + 2\beta(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2))$$

eine Gleichung, aus der sich zunächst ergiebt, dass $C_4'$ gleichfalls eine symmetrische Function der Coordinaten sein muss, also etwa

---

[28]) Vergl. Clebsch, Theorie der lin. Formen. S. 129.

[29]) Unter $f'\alpha$ ist, wie gewöhnlich, das Resultat der Substitution der Werthe $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ für $x_1\ x_2\ x_3$ in $\frac{df}{dx_1}$ verstanden.

$$C_4' \equiv a(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + 4b[x_1^3(x_2+x_3) + x_2^3(x_3+x_1) + x_3^3(x_1+x_2)]$$
$$+ 6c(x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2x_2^2) + 12d[x_1^2x_2x_3 + x_2^2x_3x_1 + x_3^2x_1x_2]$$ [30])

Auf der rechten Seite der Gleichung u) sind nur noch die Coefficienten $\alpha$ und $\beta$ unbekannt. Diese bestimmen sich dadurch, dass die Coefficienten von $x_1^8$, $x_2^8$, $x_3^8$ und $x_1^7(x_2+x_3)$ etc. verschwinden müssen, weil die Curve $C_4$ und damit auch der Ausdruck rechts (in u) Doppelpuncte in den Ecken des Dreiecks enthält. — Die Coefficienten von $C_4'$ ergeben sich dann durch weitere Vergleichung der Coefficienten beider Seiten von u).

Ich bemerke noch, dass $C_4'$ im Allgemeinen nicht, wie es vielleicht scheinen könnte, ebenfalls Doppelpuncte in den Ecken des Dreiecks hat oder auch nur einfach durch dieselben hindurchgeht. Man überzeugt sich davon leicht in einem speciellen Falle, z. B. wenn die Curve $C_4$ drei Undulationspuncte hat.

Hier fallen nämlich immer zwei Wendetangenten t in eine Undulationstangente T, und K mit $K_1$ zusammen; die Gleichung u) verwandelt sich also in die folgende

$$C_4 . C_4' \equiv (T_1 . T_2 . T_3 \tau)^2 - \lambda K^4$$
$$\equiv [(T_1 . T_2 . T_3 \tau + \sqrt{\lambda}\, K^2] [T_1 T_2 T_3 \tau - \sqrt{\lambda}\, K^2],$$

wenn $\tau$ die Doppeltangente $x_1 + x_2 + x_3$ bedeutet. Die beiden Factoren rechts sind nun die Curven $C_4$ und $C_4'$ selbst, wie auch unmittelbar klar ist, da $T_1$, $T_2$, $T_3$ auch als Doppeltangenten mit zusammenfallenden Berührungspuncten aufgefasst werden können, während K der Kegelschnitt durch die Berührungspuncte wird. Es muss also $C_4$ sowohl wie $C_4'$ die Form haben $$T_1 T_2 T_3 \tau + \mu K^2$$

$C_4$ und $C_4'$ haben nun in jedem der drei Undulationspuncte vier Puncte und in jedem Berührungspuncte der Doppeltangente $\tau$ zwei Puncte, zusammen 16 Puncte mit einander gemein, können also, da sie von einander verschieden sind, keinen weiteren Punct mit einander gemein haben d. h. $C_4'$ geht nicht durch die Eckpuncte des Dreiecks hindurch. —

In ganz ähnlicher Weise lassen sich auch die Entwickelungen für den allgemeinen Fall einer Curve $4^{ter}$ Ordnung mit drei Doppelpuncten ableiten. Die Doppeltangenten und der ihre Berührungspuncte enthaltende Kegelschnitt finden sich bei Salmon, eb. Curven S. 320 u. ff. Die Entwickelung des Wendekegelschnittes werde ich im Folgenden noch kurz angeben.

Um den Wendekegelschnitt der Curve $4^{ter}$ Ordnung mit drei Doppelpuncten

---

30) Um das Product der Wendetangenten zu finden, kann man auch die Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ (S. No. 18) benutzen und aus ihnen in Verbindung mit der Gl. $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ die u eliminiren. Das Eliminationsresultat enthält dann ausser den 6 Wendetangenten hier noch die Tangenten in den Doppelpuncten jede 3 mal als Factor.

$f \equiv a_{11} x_2^2 x_3^2 + a_{22} x_3^2 x_1^2 + a_{33} x_1^2 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_3 [a_{23} x_1 + a_{31} x_2 + a_{12} x_3]$ zu finden, bildet man in ganz derselben Weise, wie auf Seite 39 einen Ausdruck von der Form

$$H + f \,.\, \mathfrak{K} = 0,$$

wo H die Hessesche Form und $\mathfrak{K}$ einen Kegelschnitt bedeutet, und bestimmt die Coefficienten von $\mathfrak{K}$ so, dass der Ausdruck $H + f \mathfrak{K}$ das Product der Seiten $x_1\, x_2\, x_3$ als Factor enthält. Es ist aber

$$\begin{aligned} H \equiv & (a_{23}^2 - a_{22} a_{33}) [a_{33} x_2^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + a_{22} x_3^2] x_1^4 \\ & + (a_{31}^2 - a_{33} a_{11}) [a_{11} x_3^2 + 2 a_{31} x_3 x_1 + a_{33} x_1^2] x_2^4 \\ & + (a_{12}^2 - a_{11} a_{22}) [a_{22} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{11} x_2^2] x_3^4 \\ & + 2 a_{11} (2 a_{12} a_{31} - a_{23} a_{11}) x_2^3 x_3^3 + 2 a_{22} (2 a_{12} a_{23} - a_{22} a_{31}) x_3^3 x_1^3 \\ & + 2 a_{33} (2 a_{23} a_{31} - a_{12} a_{33}) x_1^3 x_2^3 \\ & + 2 (a_{22} a_{33} + 2 a_{23}^2) (a_{31} x_2 + a_{12} x_3) x_1^3 x_2 x_3 \\ & + 2 (a_{33} a_{11} + 2 a_{31}^2) (a_{12} x_3 + a_{23} x_1) x_2^3 x_3 x_1 \\ & + 2 (a_{11} a_{22} + 2 a_{12}^2) (a_{23} x_1 + a_{31} x_2) x_3^3 x_1 x_2 \\ & + 6 (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{23} a_{31} a_{12}) x_1^2 x_2^2 x_3^2. \end{aligned}$$

Durch passende Bestimmung der Coefficienten von $\mathfrak{K}$ kann man nun $H + f . \mathfrak{K}$ auf die Form bringen

$$H + f . \mathfrak{K} \equiv 3 x_1 x_2 x_3 \psi, \text{ wo}$$

$$\begin{aligned} \psi \equiv & 2[(a_{22} a_{33} - a_{23}^2)(a_{31} x_2 + a_{12} x_3) x_1^2 + (a_{33} a_{11} - a_{31}^2)(a_{12} x_3 + a_{23} x_1)^2 x_2 \\ & + (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)(a_{23} x_1 + a_{31} x_2) x_3^2] \\ & + x_1 x_2 x_3 [3 a_{11} a_{22} a_{33} - 6 a_{23} a_{31} a_{12} + a_{11} a_{23}^2 + a_{22} a_{31}^2 + a_{33} a_{12}^2]. \end{aligned}$$

Die Curve $\psi = 0$ geht auch hier durch die Wendepuncte und Doppelpuncte von $f = 0$ einfach hindurch. —

In derselben Weise, wie früher (S. 40), suche ich dann eine lineare Function $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ so zu bestimmen, dass der Ausdruek

$$\psi (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) + \varkappa f,$$

in dem $\varkappa$ eine Constante bedeutet, in zwei quadratische Factoren zerfällt, von denen der eine einen Kegelschnitt durch die drei Doppelpuncte von f, der andre den Wendekegelschnitt darstellt, so dass also

$$\begin{aligned} & \psi (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) + \varkappa f \equiv \\ & (\mu_1 x_2 x_3 + \mu_2 x_3 x_1 + \mu_3 x_1 x_2)(\alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{22} x_2^2 + \alpha_{33} x_3^2 \\ & + 2 \alpha_{23} x_2 x_3 + 2 \alpha_{31} x_3 x_1 + 2 \alpha_{12} x_1 x_2) \end{aligned}$$

Ueber zwei der Constanten, etwa $\varkappa$ und $\mu_1$, kann ich willkürlich disponiren [31]) (nur dürfen dieselben natürlich nicht $= 0$ oder $\infty$ gesetzt werden) und erhalte dann mit Hülfe von lauter linearen Gleichungen, folgende Werthe für die $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ und $\alpha$.

---

31) Ich benutze sie im Folgenden, um etwa auftretende Nenner wegzuschaffen.

$$\mu_1 = a_{31} a_{12} \; ; \; \mu_2 = a_{12} a_{23} \; ; \; \mu_3 = a_{23} a_{31}$$

$$\varkappa = 2 a_{22} a_{33} a_{31}^2 a_{12}^2 + 2 a_{33} a_{11} a_{12}^2 a_{23}^2 + 2 a_{11} a_{22} a_{23}^2 a_{31}^2$$
$$- a_{23} a_{31} a_{12} [3 a_{11} a_{22} a_{33} + a_{11} a_{23}^2 + a_{22} a_{31}^2 + a_{33} a_{12}^2]$$

$$\lambda_1 = a_{23} (A - a_{11} A_{11})$$
$$\lambda_2 = a_{31} (A - a_{22} A_{22})$$
$$\lambda_3 = a_{12} (A - a_{33} A_{33})$$
$$\alpha_{11} = 2 A_{11} [A - a_{11} A_{11}]$$
$$\alpha_{22} = 2 A_{22} [A - a_{22} A_{22}]$$
$$\alpha_{33} = 2 A_{33} [A - a_{33} A_{33}]$$
$$2 \alpha_{23} = - [A (3 a_{11} a_{23} + 2 a_{12} a_{31}) + 4 a_{23} A_{23}^2]$$
$$2 \alpha_{31} = - [A (3 a_{22} a_{31} + 2 a_{12} a_{23}) + 4 a_{31} A_{31}^2]$$
$$2 \alpha_{12} = - [A (3 a_{33} a_{12} + 2 a_{23} a_{31}) + 4 a_{12} A_{12}^2]$$

wenn unter A die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} \quad (a_{ik} = a_{ki}), \text{ und}$$

unter $A_{ik}$ die zu einem Elemente $a_{ik}$ gehörige Unterdeterminante verstanden werden.

Die $\alpha$ d. h. die Coefficienten des Wendekegelschnittes sind vom fünften Grade in Bezug auf die Coefficienten der Curve 4ter Ordnung. Ihre Determinante, deren Verschwinden das Zerfallen des Wendekegelschnittes in zwei gerade Linien aussagt, ist somit vom 15. Grade in Bezug auf die Coefficienten $a_{ik}$. (Vergl. S. 31).

## § 12.

## Verallgemeinerung des Wendepunctsatzes für Curven nter Ordnung.

**24)** Für die Wendepuncte einer allgemeinen Curve nter Ordnung gilt der folgende Satz:

*„Legt man durch $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ Wendepuncte einer Curve nter Ordnung eine Curve n — 2ter Ordnung hindurch, so schneidet diese die erstere noch in $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Puncten, die gleichfalls Wendepuncte sind.“*

Bei dem Beweise dieses Satzes kommt es, wie früher schon bei den Curven 4ter Ordnung darauf an, zu zeigen, dass die Tangenten (t) [32]

[32]) Ich werde die Tagenten durch indices unterscheiden, und für die Wendetangenten die Zahlen 1 bis $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$, für die übrigen Tangenten die Zahlen $\frac{n(n-1)}{2}$ bis $n(n-2)$ als indices gebrauchen.

in jedem der letztgenannten $\frac{(n-1).(n+2)}{2}$ Puncte die Curve $n^{ter}$ Ordnung noch in einem ihrem Berührungspuncte unendlich nahen Puncte (x) schneiden, oder dass die dreifach gerechnete Curve $n-2^{ter}$ Ordnung auf jeder Tangente den dem Berührungspunct unendlich nahen Punct (x) der Curve $n^{ter}$ Ordnung enthält. Diese dreifach zu rechnende Curve $n-2^{ter}$ Ordnung werde ich mir ebenso wie im § 3 der Einfachheit wegen vorläufig in drei verschiedene Curven $n-2^{ter}$ Ordnung $C_{n-2}$, $C'_{n-2}$, $C''_{n-2}$ zerlegt denken. Jede derselben schneidet die Curve $n^{ter}$ Ordnung noch in $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Puncten. Die Verbindungslinien der jedesmal zusammengehörigen d. h. später zusammenfallenden Schnittpuncte der beiden ersteren Curven ($C_{n-2}$ und $C'_{n-2}$) mit $C_n$ vertreten dann die Stelle der Tangenten, und der Satz 24) ist bewiesen, sobald gezeigt ist, dass auf jeder oder auf einer beliebigen dieser Linien ein Schnittpunct (x) derselben mit $C''_{n-2}$ in $C_n$ liegt.

Ich werde zum Beweise, wie auch früher bei den Curven $4^{ter}$ Ordnung, mich aller Tangenten (t) bedienen und die drei in Frage kommenden Curven durch Hülfscurven zu einem gleich hohen Grade $(n-2)(n+1)$ ergänzen.

Zu dem Zwecke sei zunächst durch $\frac{1}{2}[n(n-2)-2][n(n-2)+1]$ $+n(n-2)^2-\frac{1}{2}(n-2)^2[(n-2)^2+3]-\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ oder $\alpha$ Schnittpuncte der drei Curven $C_{n-2}$, $C'_{n-2}$, $C''_{n-2}$ mit den $n(n-2)$ Tangenten und eine Anzahl weiterer Puncte eine Curve $n(n-2)-2^{ter}$ Ordnung ($C_{n(n-2)-2}$) gelegt. — Dies ist stets möglich. Denn $\alpha$ ist 1) und zwar um $n-2$ kleiner als

$$3(n-2)[n(n-2)-2]-\frac{1}{2}[3(n-2)-1][3(n-2)-2]$$

d. h. kleiner als die höchste Zahl von Puncten, welche man nach § 1, II* unter den Bestimmungspuncten einer Curve $n(n-2)-2^{ter}$ Ordnung, ohne dass dieselbe zerfällt, willkürlich auf einer Curve $3(n-2)^{ter}$ Ordnung annehmen darf. 2) ist $\alpha$ auch $<\frac{1}{2}[n(n-2)-2]$ $[n(n-2)+1]$ d. h. kleiner als die Zahl der eine Curve $n(n-2)-2^{ter}$ Ordnung bestimmenden Puncte. — Man hat zugleich dafür Sorge zu tragen, dass sich unter den obigen $\alpha$ Puncten keiner der später beim Beweise anderweitig zu benutzenden Puncte befindet, vor allem nicht folgende $3n(n-2)$ Puncte 1) die $2n(n-2)$ Schnittpuncte der Curven $C_{n-2}$ und $C'_{n-2}$ mit $C_n$, 2) die $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ Puncte, durch

welche $C''_{n-2}$ gelegt ist (die bei dem Zusammenfallen der drei Curven Wendepuncte darstellen) und 3) die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Puncte x in denen $C''_{n-2}$ die Linien $t_{\frac{n(n-1)}{2}} \ldots t_{n(n-2)}$ in der Nähe ihres Berührungspunctes mit $C_n$ schneidet. Dies ist aber stets möglich. Denn die Zahl aller Schnittpuncte der Tangenten mit den drei Curven $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung ist $3n(n-2)^2$; es bleiben also noch $3n(n-2)^2 - 3n(n-2)$ oder $3n(n-2)(n-3)$ Puncte zu meiner Verfügung. Da diese Zahl, für $n > 3$, stets $\geqq \alpha$ ist, so kann man die genannten $\alpha$ Puncte unter ihnen, ohne Benutzung jener $3n(n-2)$ Puncte, auswählen.

Die Curve $C_{n(n-2)-2}$ schneidet nun die Tangenten noch in $n(n-2)[n(n-2)-2]-\alpha$ Puncten. Durch $\frac{1}{2}(n-2)^2[(n-2)^2+3]$ von denselben lege ich eine Curve von der Ordnung $(n-2)^2$, $[C_{(n-2)^2}]$, und endlich durch beliebige $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ Schnittpuncte der Curvensysteme $C_n . C_{n(n-2)-2}$ und $C_{n-2} . C'_{n-2} . C''_{n-2} . C_{(n-2)^2}$ eine Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung $C^0_{n-2}$.

Dann habe ich folgende drei Curvensysteme von der Ordnung $(n-2)(n+1)$:

1) $C_n$ in Verbindung mit der Curve $C_{n(n-2)-2}$,

2) Die $n(n-2)$ Tangenten t zusammen mit der zuletztbestimmten Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung $C^0_{n-2}$,

3) Die drei Curven $C_{n-2}$, $C'_{n-2}$, $C''_{n-2}$ oder die dreifach gerechnete Wendecurve im Verein mit der Curve $C_{(n-2)^2}$.

Diese drei Curvensysteme haben nun folgende Puncte gemein:

1) $C_n$ mit den Linien t und den Curven $C_{n-2}$, $C'_{n-2}$, $C'_{n-2}$

$$n(n-2)+n(n-2)+\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$$

2) $C_{n(n-2)-2}$ mit denselben Curven $\frac{1}{2}[n(n-2)-2][n(n-2)+1]$

$$+n(n-2)^2 - \frac{1}{2}(n-2)^2[(n-2)^2+3] - \frac{1}{2}(n-2)(n+1),$$

3) $C_{n(n-2)-2}$ mit den Linien t und der Curve $C_{(n-2)^2}$

$$\frac{1}{2}(n-2)^2[(n-2)^2+3]$$

4) $C_n . C_{n(n-2)-2}$ mit $C_{n-2} . C'_{n-2} . C''_{n-2} . C_{(n-2)^2}$ und $C^0_{n-2}$

$$\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$$

d. h. zusammen $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)[(n-2)(n+1)+3]-1$ Puncte.

Hieraus folgt nach § 1, II, dass sie auch weitere

$$\frac{1}{2}[(n-2)(n+1)-1][(n-2)(n+1)-2]$$

Puncte gemein haben.

Zu diesen Puncten gehören vor allem die oben bezeichneten Puncte x, die als Durchschnittspuncte von $C''_{n-2}$ mit einer Linie t auch auf einer der Curven des ersten Systems $C_n \cdot C_{n(n-2)-2}$ liegen müssen. Nun blieben zur definitiven Bestimmung von $C_{n(n-2)-2}$ noch

$$\frac{1}{2}(n-2)^2[(n-2)^2+3]+\frac{1}{2}(n-2)(n+1)-n(n-2)^2$$

Puncte willkürlich zu wählen. Diese seien jetzt so festgesetzt, dass die Curve $n(n-2)-2^{\text{ter}}$ Ordnung nicht durch den Punct x auf irgend einer Linie t hindurchgeht. Dann muss dieser Punct, da er nach der eben gemachten Annahme auf $C_{n(n-2)-2}$ nicht liegen kann, auf $C_n$ liegen, d. h. $C_n$ hat hier einen Wendepunct. Da nun die Linie t beliebig war, so gilt dasselbe auch von den übrigen, und ist damit der Satz 24) bewiesen.

Der eben geführte Beweis verlangt zwar die Zuhülfenahme von Curven bedeutend hoher Ordnung, hat aber den Vortheil, dass er für alle Werthe von $n (n > 3)$ gültig ist.

Selbst für $n = 3$ wird derselbe mit dem gewöhnlichen Beweis identisch, wenn man die drei ergänzenden Curven, die hier alle vom Grade 1 sind und zusammenfallen, einfach fortlässt. Für $n = 4$ fällt der Beweis im Wesentlichen mit dem im § 3 geführten zusammen, sobald man dort die drei Curvensysteme zu einem gleich hohen Grade ergänzt. —

Von dem Satze 24) aus gelangt man nun unmittelbar auch zu einer Erweiterung des Satzes 6), die folgendermassen lautet:

**25)** „*Legt man durch* $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ *Wendepuncte einer Curve* $n^{ter}$ *Ordnung* ($C_n$) *eine Curve* $n-2^{ter}$ *Ordnung* ($C_{n-2}$), *so schneidet diese die erstere in* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *ferneren Wendpuncten (Satz 24). — Die* $n(n-2)$ *Wendetangenten schneiden die Curve* $n^{ter}$ *Ordnung noch in* $n(n-2)(n-3)$ *Puncten, durch die sich eine Curve* $(n-2)(n-3)^{ter}$ *Ordnung legen lässt. — Die Puncte, in denen diese Curve und die dreifach gerechnete Wendepunctcurve die Wendetangenten ausserhalb* $C_n$ *schneiden, liegen auf einer Curve* $n(n-3)^{ter}$ *Ordnung.*“

Betrachtet man nämlich die $n(n-2)$ Wendetangenten als eine Curve $n(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, ebenso die dreifach gerechnete Curve durch

die Wendepuncte zusammen mit einer Curve $(n-2)(n-3)^{ter}$ Ordnung, die durch $n(n-2)(n-3) - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ der weiteren Schnittpuncte der Wendetangenten mit $C_n$ gelegt ist, so haben diese beiden Curven $n(n-2)^{ter}$ Ordnung mit der Curve $n^{ter}$ Ordnung folgende Puncte gemein,

1) die $n(n-2)$ Wendepuncte, die jeder dreifach zu zählen sind,

2) die letztgenannten $n(n-2)(n-3) - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Puncte

d. h. zusammen $n(n-2).n - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Puncte; sie haben also nach § 1 Satz III auch fernere $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Puncte mit derselben gemein.

$C_{(n-2)(n-3)}$ geht daher in der That durch die genannten $n(n-2)(n-3)$ Schnittpuncte der Wendetangenten mit $C_n$ hindurch, während die weiteren Schnittpuncte der beiden Curvensysteme $n(n-2)^{ter}$ Ordnung auf einer Curve $n(n-3)^{ter}$ Ordnung liegen. —

Diese Curve $n(n-3)^{ter}$ Ordnung entspricht der zugeordneten Curve bei den Curven $4^{ter}$ Ordnung, nimmt aber, da sie schon für $n > 4$ von bei weitem höherem Grade als die Curve $n^{ter}$ Ordnung selbst ist, weniger Interesse in Anspruch. —

Die aus dem Satze 25) sich ergebende analytische Darstellung der Curven $n^{ter}$ Ordnung in Verbindung mit einer solchen Curve $n(n-3)^{ter}$ Ordnung

$$C_n . C_{n(n-3)} \equiv t_1 \ldots t_{n(n-2)} + \lambda . (C_{(n-2)})^3 . C_{(n-2)(n-3)},$$

liefert ferner für die Puncte der Wendecurve $(C_{n-2})$ Eigenschaften, die denen im § 8 für Curven $4^{ter}$ Ordnung entwickelten analog sind.

Der Satz 24) lässt endlich nach der Analogie der Curven $3^{ter}$ und $4^{ter}$ Ordnung erwarten, dass bei einer Curve $n^{ter}$ Ordnung höchstens $n(n-2)$ Wendepuncte reell sein werden. —

Schliesslich bemerke ich noch, dass mir der Satz 24) der specielle Fall eines bei Weitem allgemeineren Satzes zu sein scheint. Dasselbe Recht des Behandlung nämlich wie die dreipunctig berührende Gerade oder die Wendetangente, hat auch der sechspunctig berührende Kegelschnitt, die zehnpunctig berührende Curve $3^{ter}$ Ordnung, überhaupt die $\nu + 1$ punctig berührende Curve $n^{ter}$ Ordnung, wenn $\nu = \frac{n(n+3)}{2}$ ist. Damit eine Berührung dieser Art in einem Puncte[33]) einer Curve $p^{ter}$ Ordnung möglich sei, ist einer Bedingung zu genügen, und alle Puncte der Curve $p^{ter}$ Ordnung, welche diese Bedingung erfüllen, bilden

---

33) Man könnte solche Puncte vielleicht zweckmässig Schmiegungspuncte $1^{ter}$, $2^{ter}$, . $\nu^{ter}$ Ordnung nennen.

die Durchschnittspuncte derselben mit einer andern Curve. Diese lässt sich nun vermuthlich, wie nach Satz 24) bei den Wendepuncten die Hessesche Curve, durch Curven niederen Grades ersetzen. — So liegen z. B. bei einer Curve $3^{ter}$ Ordnung die Puncte, in denen eine sechspunctige Berührung mit einem Kegelschnitt stattfindet auf einer Curve $9^{ter}$ Ordnung, während auf der Verbindungslinie zweier solcher Puncte stets ein dritter derselben Art liegt.[34])

Ich hoffe, bei späterer Gelegenheit hierauf zurückkommen zu können.

---

[34]) Dieser Satz, der von Steiner mitgetheilt und von Hesse bewiesen ist, lässt sich leicht mit Hülfe der Sätze des § 1 bestätigen. Verbindet man nämlich zwei Puncte, in denen die Kegelschnitte K resp. K′ die Curve $3^{ter}$ Ordnung $C_3$ sechspunctig berühren, durch eine Gerade L und construirt in dem dritten Schnittpunct derselben mit $C_3$ den fünfpunctig berührenden Kegelschnitt K″, so lässt sich zeigen, dass K″ in dem Berührungspunct noch einen weiteren Punct mit $C_3$ gemein hat. Die beiden Curvensysteme $6^{ter}$ Ordnung K, K′, K″ und die 6 fach gerechnete Linie L haben nämlich mit $C_3$ 17 Puncte, also nach § 1, II noch einen weiteren Punct gemein, womit der obige Satz bewiesen ist. Zugleich ergiebt sich eine zweite Curve $3^{ter}$ Ordnung $C'_3$, die zu L und K, K′, K″ in genau demselben Verhältnisse steht wie $C_3$ selbst.

# THESEN.

1. Der von Aronhold eingeführten symbolischen Bezeichnung kann eine reale Bedeutung untergelegt werden.
2. Die von Sarrut (in den Comptes rendus von 1853) angegebene Methode zur Verwandlung geradliniger Bewegung in kreisförmige und umgekehrt verdient allgemeine Einführung.
3. Es ist im Allgemeinen unrichtig, dass bei der Verwandlung einer in Punctcoordinaten gegebenen Curvengleichung in eine solche mit Liniencoordinaten zu den ursprünglich vorhandenen Curvenzweigen neue hinzutreten.
4. Zu jeder Curve 3ter Ordnung gehört in Bezug auf jede 3 Wendepuncte enthaltende Gerade (A) eine andere Curve 3ter Ordnung, welche diese 3 Wendepuncte gleichfalls zu Wendepuncten hat. Ihre anderen 6 Wendepuncte aber liegen auf den beiden Geraden (B und C), welche mit der ersten Geraden (A) ein Wendepunctdreieck für die gegebene Curve 3ter Ordnung bilden; und zwar sind die den Wendepuncten auf einer dieser Graden, etwa B, zugehörigen Tangenten identisch mit den Tangenten in den auf der anderen Geraden (C) gelegenen Wendepuncten der gegebenen Curve.
5. Für die Erklärung der Grundconstitution der Materie hat von physikalischem Standpuncte aus allein die Annahme punctueller von einander getrennter Atome wissenschaftliche Berechtigung.

# VITA.

Ich Justus Carl Grassmann bin am 23. December 1851 zu Stettin geboren. Meine Eltern sind Professor Hermann Günther Grassmann und Marie Therese Grassmann geb. Knappe. Meine Schulbildung erlangte ich auf dem Stettiner vereinigten Königlichen und Stadt Gymnasium, jetzigen Marienstifts-Gymnasium, welches ich Ostern 1869 mit dem Zeugniss der Reife verliess, um in Göttingen Mathematik und Physik zu studiren. Dort hörte ich während dreier Semester Vorlesungen bei den Herren Professoren Clebsch, Frensdorff, John, Kohlrausch, Stern, W. Weber. Im Sommer 1870 trat ich bei Ausbruch des französischen Krieges in die preussische Armee ein, bei deren 56. Inf. Rgt. ich den Feldzug mitmachte. Nach beendigtem Kriege besuchte ich nacheinander die Universitäten Leipzig, Königsberg, Berlin, auf denen ich den Vorlesungen der Herren Professoren A. Mayer, C. Neumann, F. Neumann, Richelot, Harms, Helmholtz, Pochhammer, Weierstrass, Zeller beiwohnte. Zu Göttingen und Königsberg habe ich den dortigen Königl. mathematisch-physikalischen Seminarien angehört. —

Den genannten Herren Professoren, sowie allen denen, die auf dem Gymnasium, wie auf der Universität mich mit ihrem Rathe und Wohlwollen beehrten, vor allen Dingen meinem Vater, sage ich hiermit meinen tiefgefühltesten Dank.